ESERCITAZIONI PER ESAMI DI ANALISI MATEMATICA

SVOLTI DAL PROF. GIANLUIGI TRIVIA

Esercizio 1. Studia le caratteristiche della seguente funzione e tracciane il grafico

$$y=\frac{\sqrt{x^4+1}}{x}$$

Soluzione. la funzione va studiata nell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.

(1) Campo di esistenza: la funzione presenta al numeratore una radice quadrata sempre positiva, essendo il suo radicando la somma di due quadrati; essa è definita quindi per $x \neq 0$, cioè

$$(-\infty;0)\cup(0;-\infty)$$

(a) Segno della funzione: per quanto detto sopra, il segno della funzione è determinato dal segno del denominatore, per cui

$$\begin{aligned} y>0 \quad &per \quad x>0 \\ y<0 \quad &per \quad x<0 \end{aligned}$$

(b) intersezione con gli assi: intersezione asse x, di equazione $y=0$

$$\sqrt{x^4+1}=0$$

nessuna intersezione;
intersezione con l'asse y, di equazione $x=0$, non possibile perché 0 non appartiene al campo di esistenza della funzione

(c) asintoti

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x^4+1}}{x} &= \frac{x^2\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^4}\right)}}{x}=\pm\infty \\ \lim_{x\to 0^{\mp}}\frac{\sqrt{x^4+1}}{x} &= \mp\infty \end{aligned}$$

(d) punti estremanti: calcolo la derivata prima della funzione

$$y^{'}=\frac{N^{'}D-ND^{'}}{D^2}$$

ricordando che la derivata del numeratore va calcolata secondo le regole delle funzioni composte,cioè $\left(\sqrt{g(x)}\right)^{'}=\frac{g^{'}(x)}{2\sqrt{g(x)}}$

$$y^{'}=\frac{\frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+1}}\cdot x-1\cdot\sqrt{x^4+1}}{x^2}=\frac{2x^4-\left(x^4+1\right)}{x^2\sqrt{x^4+1}}=\frac{x^4-1}{x^2\sqrt{x^4+1}}$$

calcoliamo il segno della derivata prima, cioè

$$\frac{x^4-1}{x^2\sqrt{x^4+1}}>0$$

(i) $N>0$ $x^4-1=\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)>0$, cioè per $x<-1\ \vee x>1$
(ii) $D>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ pertanto

$$\begin{aligned} y^{'}>0 \qquad & x<-1\ \vee x>1 \\ y^{'}<0 \qquad & -1<x<1 \\ y^{'}=0 \qquad & x=\pm1 \end{aligned}$$

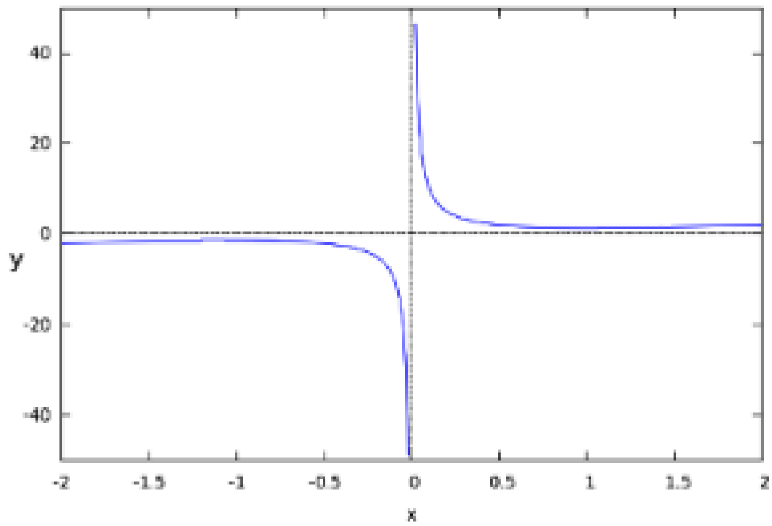
la funzione ha quindi un massimo per $x_{max}=-1$ nel punto di coordinate $M\left(-1;-\sqrt{2}\right)$ e un minimo per $x_{min}=1$ nel punto di coordinate $m\left(1;\sqrt{2}\right)$

(e) punti di flesso: calcoliamo la derivata seconda

$$\begin{aligned}
y'' &= \frac{4x^3\left(x^2\sqrt{x^4+1}\right)-\left(x^4-1\right)\left(2x\sqrt{x^4+1}+\frac{2x^5}{\sqrt{x^4+1}}\right)}{x^4\left(x^4+1\right)}= \\
&= \frac{4x^5\sqrt{x^4+1}-\left(x^4-1\right)\left(\frac{82x\left(x^4+1\right)+2x^5}{\sqrt{x^4+1}}\right)}{4x^4\left(x^4+1\right)}= \\
&= \frac{4x^5\left(x^4+1\right)-2x\left(x^4-1\right)\left(2x^4+1\right)}{x^4\left(x^4+1\right)\sqrt{x^4+1}} \\
&= \frac{4x^9+4x^5-2x\left(2x^8-x^4-1\right)}{x^4\left(x^4+1\right)\sqrt{x^4+1}}= \\
&= \frac{6x^5+2x}{x^4\left(x^4+1\right)\sqrt{x^4+1}}=\frac{2\left(3x^4+1\right)}{x^3\left(x^4+1\right)\sqrt{x^4+1}}
\end{aligned}$$

La derivata seconda è uguale a zero, quando il numeratore è uguale a 0, condizione che non si verifica mai. La funzione non presenta pertanto flessi.

(f) Grafico della funzione



Esercizio 2. Risolvere nel campo reale la seguente disequazione

$$\sqrt{\frac{x-1-\sqrt{x-1}}{2-x}}<2$$

Soluzione. studiamo prima le condizioni di esistenza del radicale, $\frac{x-1-\sqrt{x-1}}{2-x}\geq 0$, e per questo è necessario un breve richiamo delle disequazioni irrazionali. Sia $f(x)$ il radicando di una radice di indice pari, allora si presentano due casi:

(1) $\sqrt{f(x)}<g(x)$, la disequazione si risolve mediante il sistema

$$\begin{cases} f(x) & \geq & 0 \\ g(x) & > & 0 \\ f(x) & < & [g(x)]^2 \end{cases}$$

(2) $\sqrt{f(x)}>g(x)$, la disequazione si risolve con l'unione dei due sistemi

$$\begin{cases} f(x) & \geq & 0 \\ g(x) & < & 0 \end{cases} \cup \begin{cases} g(x) & \geq & 0 \\ f(x) & > & [g(x)]^2 \end{cases}$$

Nel nostro caso, la condizione di esistenza chiede di studiare la non negatività della frazione $\frac{x-1-\sqrt{x-1}}{2-x}$, per cui

(a) $N \geq 0$ per $x-1-\sqrt{x-1} \geq 0$, cioè $\sqrt{x-1} \leq x-1$; le soluzioni si ottengono pertanto risolvendo il sistema (vedi caso (a))

$$\begin{cases} x-1 & \geq & 0 \\ x-1 & > & 0 \\ x-1 & < & (x-1)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 1 \\ x > 1 \\ x^2-3x+2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x > 1 \\ x \leq 1 \vee x \geq 2 \end{cases} \quad \textit{intervallo comune} \quad x \geq 2$$

(b) $D > 0$ per $2-x > 0$, cioè $x < 2$

(c) La frazione sarà quindi sempre negativa

(3) la disequazione non ha quindi alcuna soluzione

Esercizio 3. Calcolare gli integrali della seguente equazione differenziale

$$\left(1+\tan^2 y\right)\tan y \cdot e^{\tan^2 y} \cdot y' = e^{\sqrt[3]{x}} \cdot x^{-\frac{2}{3}}$$

Soluzione. L'equazione può essere risolta con il metodo della variabili separabili

$$\left[\left(1+\tan^2 y\right)\tan y \cdot e^{\tan^2 y}\right] dy = \left(e^{\sqrt[3]{x}} \cdot x^{-\frac{2}{3}}\right) dx$$

da cui

$$\int \left(1+\tan^2 y\right)\tan y \cdot e^{\tan^2 y} dy = \int \left(e^{\sqrt[3]{x}} \cdot x^{-\frac{2}{3}}\right) dx$$

risolviamo il primo integrale sostituendo $\tan y = t$, per cui, essendo $y = \arctan t$, si ha $dy = \frac{1}{1+t^2} dt$ e l'integrale diviene

$$\frac{1}{2}\int t e^{t^2} 2t dt = \frac{1}{2}\int e^{t^2} d\left(t^2\right) = \frac{1}{2} e^{t^2}$$

sostituendo nuovamente, si ha

$$\int \left(1+\tan^2 y\right)\tan y \cdot e^{\tan^2 y} dy = \frac{1}{2} e^{\tan^2 y} + C_1$$

risolviamo ora il secondo integrale

$$\int \left(e^{\sqrt[3]{x}} \cdot x^{-\frac{2}{3}}\right) dx = \int \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$$

anche qui operiamo la sostituzione $\sqrt[3]{x} = t$ da cui $dx = 3tdt^2$; l'integrale diviene

$$\int \frac{e^t}{t^2} \cdot 3t^2 dt = 3\int e^t dt = 3e^t$$

da cui

$$\int \left(e^{\sqrt[3]{x}} \cdot x^{-\frac{2}{3}}\right) dx = 3e^{\sqrt[3]{x}} + C_2$$

Confrontando i risultati dei due integrali, si ha

$$\frac{1}{2} e^{\tan^2 y} = 3e^{\sqrt[3]{x}}$$

passando al logaritmo naturale, si ha

$$\ln\left(\frac{1}{2} e^{\tan^2 y}\right) = \ln\left(3e^{\sqrt[3]{x}}\right)$$

cioè

$$\begin{aligned} \ln\frac{1}{2} + \tan^2 y &= \ln 3 + \sqrt[3]{x} \\ \tan^2 y &= \ln 6 + \sqrt[3]{x} \\ y &= \pm \arctan\left(\ln 6 + \sqrt[3]{x}\right) + C \end{aligned}$$

Esercizio 4. Calcolare l'insieme di definizione della funzione

$$z = \sqrt{\frac{(y+x-1)\left(y+x^2\right)}{\left(y+\frac{1}{2}\right)}}$$

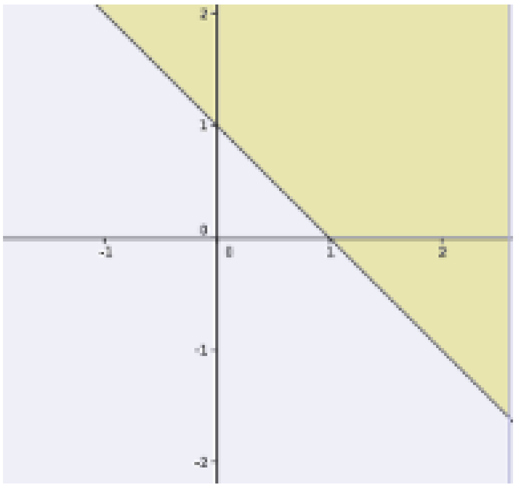
In questo caso, l'argomento della radice deve essere non negativo, cioè,

$$\frac{(y+x-1)\left(y+x^2\right)}{\left(y+\frac{1}{2}\right)} \geq 0$$

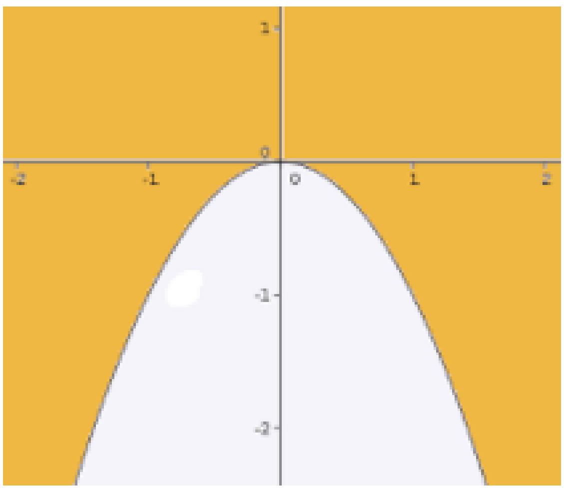
Le disequazioni possono essere risolte graficamente, rappresentando la prima una retta, la seconda una parabola con vertice nell'origine e concavità verso il basso e la terza una retta parallela all'asse x. Risolviamo applicando le modalità delle disequazioni fratte

$$\begin{aligned} (y+x-1) &\geq 0 \\ \left(y+x^2\right) &\geq 0 \\ y+\frac{1}{2} &> 0 \end{aligned}$$

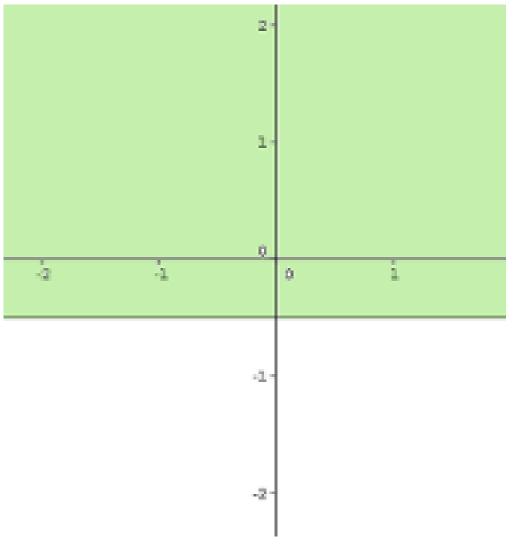
Risolviamo le disequazioni graficamente. La prima disequazione è verificata dalle coppie rappresentate dalla parte colorata



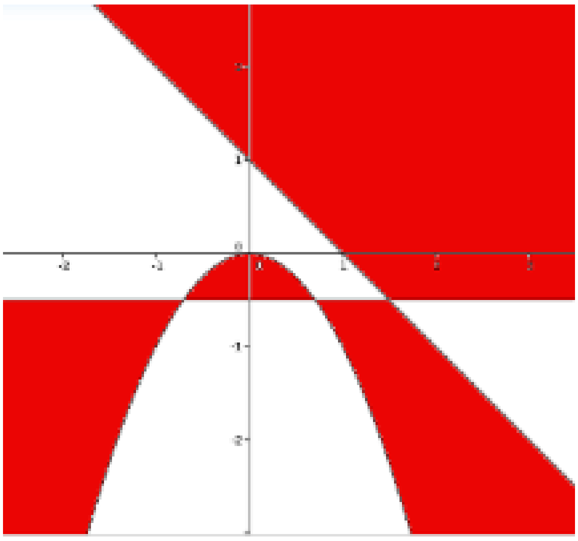
la seconda disequazione nella parte di piano colorata



infine, per l'ultima disequazione



considerando positive le parti colorate e negative quelle in bianco, si ha che il radicando è positivo nelle parti colorate:



Esercizio 5. Stabilire in quali intervalli è applicabile il teorema di Rolle alla funzione

$$y = \left|x^2 - 5x + 4\right|$$

Soluzione. Il teorema di Rolle afferma che se una funzione reale di variabile reale è continua in un intervallo $[a, b]$ e derivabile nell'intervallo (a, b), cioè nei suoi punti interni, allora, se $f(a) = f(b)$, esiste un punto c per il quale $f^{'}(c) = 0$.
Il polinomio $x^2 - 4x + 5 = (x - 1)(x - 4)$, per cui

$$\begin{array}{rcl} y = x^2 - 5x + 4 & per & x \leq 1 \vee x \geq 4 \\ y = -x^2 + 5x - 4 & per & 1 \leq x \leq 4 \end{array}$$

La funzione modulo non è derivabile nei punti $x = 1$ e $x = 4$ perché in essi i limiti destro e sinistro sono diversi, infatti, se calcoliamo le derivate si ha

$$y^{'} = \begin{cases} 2x - 5 & x \leq 1 \vee x \geq 4 \\ -2x + 5 & 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

per cui

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^-} y^{'} &= -3 \\ \lim_{x \to 1^+} y^{'} &= 3 \end{aligned}$$

lo stesso vale anche per l'altro punto. La funzione polinomiale è continua per ogni valore di x, per cui sono soddisfatte le condizioni del teorema di Rolle. Troviamo il valore per il quale la derivata prima si annulla

$$\pm 2x \mp 5 = 0 \quad per \quad x = \frac{5}{2}$$

inoltre $f\left(\frac{5}{2}-a\right) = f\left(\frac{5}{2}-a\right)$. Troviamo l'intervallo di $\frac{5}{2}$, cioè $\left[\frac{5}{2}-a; \frac{5}{2}+a\right]$ ponendo

$$\begin{array}{ll} \frac{5}{2} - a \geq 1 & a \leq \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} + a \leq 4 & a \leq \frac{3}{2} \end{array}$$

Esercizio 6. Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{e^x + e^x \ln \tan e^x}{\cos^2 e^x} dx$$

con $\cos e^x \neq 0$ e $\tan e^x > 0$.

Soluzione. Risolviamo applicando il metodo della sostituzione della variabile, ponendo cioè

$$e^x = t \qquad dx = \frac{dt}{t}$$

sostituendo, si ha

$$\int \frac{t\,(1 + \ln \tan t)}{\cos^2 t} \cdot \frac{dt}{t}$$

ma, $(\tan t)' = \frac{1}{\cos^2 t}$, per cui $d\,(\tan t) = \frac{dt}{\cos^2 t}$ e sostituendo ancora

$$\tan t = u \qquad du = \frac{dt}{\cos^2 t}$$

e l'integrale diviene

$$\int \frac{1 + \ln u}{\cos^2 t} \cdot \cos^2 t du = \\ = \int du + \int \ln u du$$

risolviamo il secondo integrale per parti

$$\int du + u \ln u - \int u \cdot \frac{1}{u} du = u \ln u$$

sostituendo a ritroso, si ha

$$\tan e^x \ln \tan e^x + C$$

Esercizio 7. Determinare l'insieme di definizione e calcolare le derivate parziali prime della funzione

$$f\,(x,y) = \sqrt{\frac{\ln\,(x+1) + x^2 - 1}{x^2 + y^2 - 4}}$$

Dire poi se tra i punti di frontiera esistono degli estremanti.

Soluzione. La funzione presenta una radice quadrata, il cui argomento deve essere non negativo, un logaritmo nel radicando, il suo argomento deve essere positivo e una frazione il cui denominatore deve essere diverso da zero. Le tre condizioni poste si possono ridurre a due, in quanto l'annullamento del denominatore è una sottoparte della prima condizione; si traducono quindi

$$\begin{cases} \frac{\ln(x+1)+x^2-1}{x^2+y^2-4} \geq 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases}$$

Risolviamo la prima disequazione fratta

$$N \geq 0 \qquad \ln\,(x+1) + x^2 - 1 \geq 0$$

$$D > 0 \qquad x^2 + y^2 - 4 > 0$$

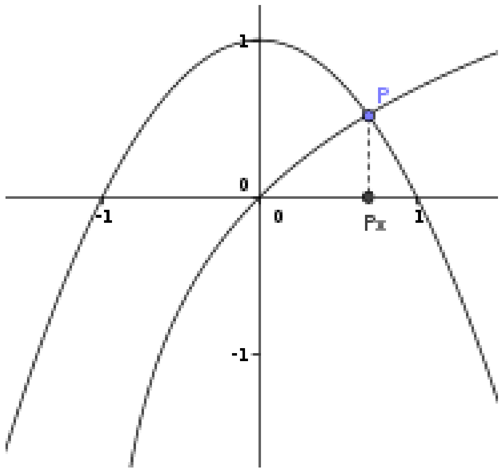
Risolviamo entrambe le disequazioni graficamente.

Prima disequazione

$$\ln(x+1) \geq 1 - x^2$$

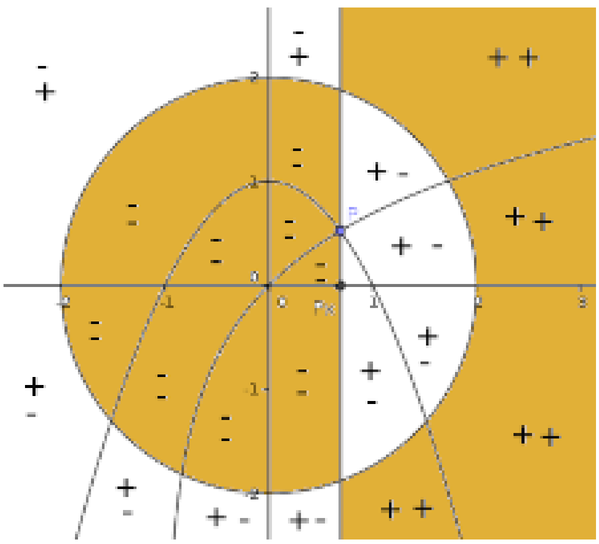
una funzione logaritmica traslata verso sinistra di vettore $-1; 0$ e una parabola con concavità rivolta verso il basso e vertice $V\left(-\frac{b}{2a} = 0; 1\right)$ e intersezioni con l'asse x per $x = \pm 1$. I grafici sono quindi

Il punto di intersezione Px è compreso tra 0 e 1la disequazione è verificata per $x \geq P_x$

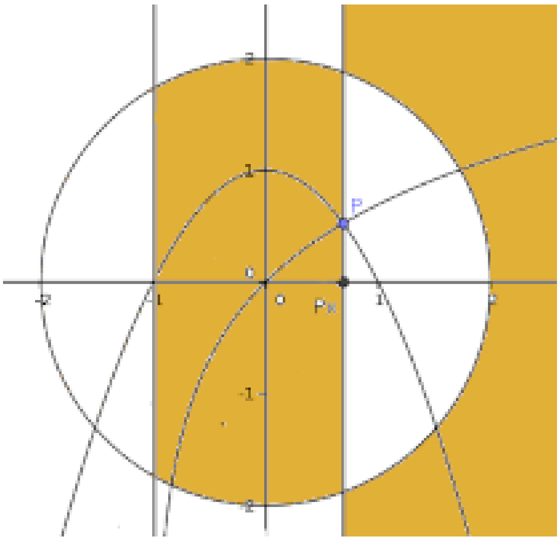


La seconda disequazione rappresenta una circonferenza centrata nell'origine di raggio 2 ed è verificata per tutti i punti esterni alla circonferenza stessa;

mettendo assieme i due risultati, sempre graficamente, si ha che la frazione è non negativa negli intervalli indicati dalla



se consideriamo ora anche la seconda disequazione del sistema, che ha come soluzioni $x > -1$, il dominio è dato dalle soluzioni comuni, cioè ancora graficamente



Esercizio 8. Determinare gli eventuali punti di discontinuità della funzione, classificare la specie di discontinuità in $x = 0$ ed eliminare la discontinuità, se possibile in tale punto

$$y = x \cdot \frac{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}} + \frac{\ln(1+x)}{x}$$

Soluzione. la funzione è la somma di due frazioni i cui denominatori devono essere diversi da zero; inoltre, nel numeratore della seconda frazione, l'argomento del logaritmo deve essere positivo.

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}} &\neq 0 \\ x &\neq 0 \\ 1+x &> 0 \end{aligned}$$

Risolvendo

$$\begin{aligned} \forall x &\in \mathbb{R} \\ x &\neq 0 \\ x &> -1 \end{aligned}$$

i punti di discontinuità si trovano quindi per $x = 0;\ x = -1$. Per $x = 0$, calcoliamo i limiti

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^{\pm}} x \cdot \frac{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}} + \frac{\ln(1+x)}{x} &= \\ \lim_{x\to 0^{+}} x \cdot \frac{e^{\frac{1}{x}}\left(1 - e^{-\frac{2}{x}}\right)}{e^{\frac{1}{x}}\left(1 + e^{-\frac{2}{x}}\right)} + \frac{\ln(1+x)}{x} &= 1 \end{aligned}$$

in quanto $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ (limite notevole). Si può eliminare la discontinuità ponendo

$$y = \begin{cases} x \cdot \frac{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}} + \frac{\ln(1+x)}{x} & per \quad x \neq 0 \\ \lim_{x\to 0^{\pm}} x \cdot \frac{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}} + \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 & per \quad x = 0 \end{cases}$$

Esercizio 9. Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^4} + x\sqrt[6]{x} + x} dx$$

Soluzione. sostituisco $x = t^6$, e $dx = 6t^5 dt$, ottenendo

$$\int \frac{\sqrt{t^6} + \sqrt[3]{t^6}}{\sqrt[3]{t^{24}} + t^6\sqrt[6]{t^6} + t^6} \cdot 6t^5 dt = 6 \int \frac{t^3 + t^2}{t^8 + t^7 + t^6}$$

raccogliendo

$$6 \int \frac{t^2(t+1)}{t^6(t^2+t+1)} \cdot t^5 dt = 6 \int \frac{t^2+t}{t^2+t+1} dt$$

aggiungendo e togliendo 1al numeratore, si ha

$$6\int \frac{t^2+t+1-1}{t^2+t+1}dt = 6\int dt - 6\int \frac{dt}{t^2+t+1}$$

il secondo integrale si può risolvere, riscrivendo

$$6t - 6\int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

ma $\frac{3}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, per cui, moltiplicando Num. e Den. per $\frac{4}{3}$

$$6t - 6\times\frac{4}{3}\int \frac{dt}{\left(\frac{2t+1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = 6t - 8\int \frac{dt}{\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

moltiplicando per $\sqrt{\frac{3}{2}}$ e ricordando gli integrali delle funzioni elementari, si ha

$$6t - 8\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}dt}{1+\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 6t - 4\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)$$

risolvendo ora in x, si ha

$$6\sqrt[6]{x} - 4\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Esercizio 10. Stabilire il campo di esistenza della seguente funzione e la natura dei suoi punti di frontiera

$$f(x,y) = \sqrt{1 - \frac{\sqrt{-\left(4x^2+4y^2-4\right)}}{\sqrt{1-4y^2}}}$$

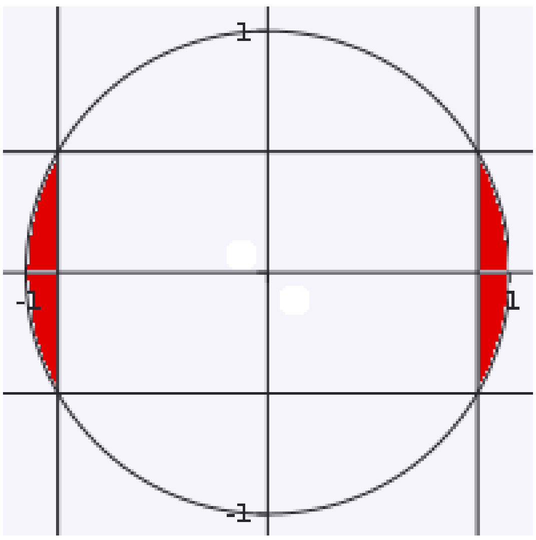
Soluzione. la radice principale deve avere il radicando non negativo; lo stesso deve valere per le ulteriori radici, ma $\sqrt{1-4y^2}$ può avere radicando solo positivo, essendo al denominatore di una frazione. Pertanto

$$\begin{cases} 1 - \frac{\sqrt{-(4x^2+4y^2-4)}}{\sqrt{1-4y^2}} & \geq & 0 \\ 4x^2+4y^2-4 & \leq & 0 \\ 1-4y^2 & > & 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{1-4y^2} - \sqrt{-\left(4x^2+4y^2-4\right)} \geq 0 \\ x^2+y^2-1 \leq 0 \\ -\frac{1}{2} < y < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^2-3 \leq 0 \\ x^2+y^2-1 \leq 0 \\ -\frac{1}{2} < y < \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2} \vee x \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \\ x^2+y^2-1 \leq 0 \\ -\frac{1}{2} < y < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Graficamente



Studiare e tracciare il grafico della seguente funzione

$$y = 2x - \frac{x}{|\ln x|}$$

Soluzione. Campo di esistenza: denominatore della frazione diverso da zero e argomento del logaritmo positivo:

$$\begin{cases} \ln x \neq 0 & x \neq 1 \\ x > 0 & x > 0 \end{cases}$$

per cui

$$C.E: \ (0;1) \cup (1;+\infty)$$

(1) La presenza del valore assoluto richiede lo studio della funzione nei due intervalli, cioè

$$\begin{cases} y = 2x + \dfrac{x}{\ln x} & 0 < x < 1 \\ \\ y = 2x - \dfrac{x}{\ln x} & x > 1 \end{cases}$$

(2) Primo caso $y = 2x + \dfrac{x}{\ln x}$ per $0 < x < 1$.

(a) Intersezione con l'asse x

$$2x + \frac{x}{\ln x} = 0$$

cioè

$$2x \ln x + x = 0 \qquad x(2\ln x + 1) = 0$$

$$x = 0 \ \ non\, acc \qquad x = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

la funzione passerà quindi per il punto $A\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}};0\right)$

(b) intersezione con l'asse y sarà vuota tenendo conto del campo di esistenza

(3) segno della funzione

$$2x + \frac{x}{\ln x} > 0$$

tenendo conto della risoluzione dell'equazione e del campo di esistenza, si ha

$$y < 0 \quad per \quad \frac{1}{\sqrt{e}} < x < 1$$

$$y > 0 \quad per \quad 0 < x < \frac{1}{\sqrt{e}}$$

(4) comportamento della funzione negli estremi del campo di esistenza

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2x\ln x + x}{\ln x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\ln x + 3}{\frac{1}{x}} = \frac{\frac{2}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{2x\ln x + x}{\ln x} = \lim_{x\to 1^-} \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$

eventuali asintoti obliqui

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{x(2\ln x + 1)}{x\ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\ln x + 1}{\ln x} = 2$$

$$q = \lim_{x\to\infty} \frac{x(2\ln x + 1)}{\ln x} - 2x = \lim_{x\to\infty} \frac{2x\ln x + x - 2x\ln x}{\ln x} = \infty$$

non esistono pertanto asintoti obliqui

(5) crescenza e decrescenza

$$y^{'} = \frac{2\ln^2 x + \ln x - 1}{\ln^2 x} > 0$$

(a) Numeratore positivo

$$N > 0 \quad 2\ln^2 x + \ln x - 1 > 0$$

sostituendo $\ln x = t$, si ha

$$2t^2 + t - 1 > 0$$

per cui $t < -1 \vee t > \frac{1}{2}$, cioè

$$\begin{array}{ll} \ln x > \dfrac{1}{2} & x > \sqrt{e}\, fuori\, dal\, C.E. \\ \ln x < -1 & 0 < x < \dfrac{1}{e} \end{array}$$

(b) Denominatore sempre positivo nel campo di esistenza; pertanto

$$\begin{array}{lll} y^{'} > 0 & crescente\ per & \dfrac{1}{e} < x < 1 \\ y^{'} < 0 & decrescente\ per & 0 < x < \dfrac{1}{e} \end{array}$$

avremo quindi un massimo $M\left(\frac{1}{e}; \frac{1}{e}\right)$.

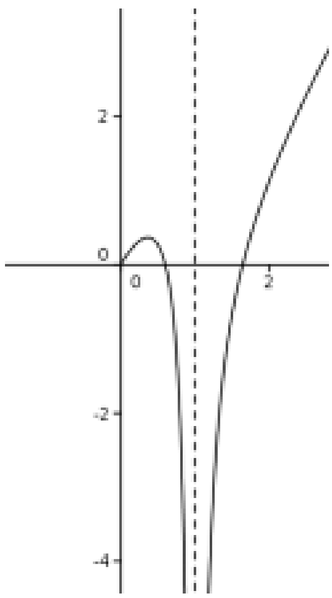
(6) concavità e flessi

$$\begin{aligned} y^{''} &= \frac{\left(\frac{4\ln x}{x} + \frac{1}{x}\right)\ln^2 x - \frac{2\ln x}{x}\left(2\ln^2 x + \ln x - 1\right)}{\ln^4 x} = \\ &= \frac{\left(\frac{4\ln x}{x} + \frac{1}{x}\right)\ln x - \frac{2}{x}\left(2\ln^2 x + \ln x - 1\right)}{\ln^3 x} \\ y^{''} &= \frac{-\frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x}}{\ln^3 x} = \frac{2 - \ln x}{x \ln^3 x} \end{aligned}$$

la derivata seconda si annulla per

$$x = e^2$$

(7) Grafico della funzione



Esercizio 11. Risolvere la seguente disequazione

$$\ln\left(\sqrt{\ln|x| - x^2 + 5x - 3}\right) > 0$$

Soluzione. Per risolvere la disequazione in $\mathbb{R}$ dobbiamo risolvere il seguente sistema che contiene anche le condizioni di esistenza del primo membro. In particolare, 1°) il logaritmo esiste se il suo argomento è positivo, 2°) la radice quadrata esiste se il suo radicando non è negativo. Pertanto

$$\begin{cases} \sqrt{\ln|x| - x^2 + 5x - 3} & > 0 \\ \ln|x| - x^2 + 5x - 3 & \geq 0 \\ \ln\left(\sqrt{\ln|x| - x^2 + 5x - 3}\right) & > 0 \end{cases}$$

nell'intervallo delle condizioni di esistenza la disequazione logaritmica si risolve considerando che la funzione logaritmica è positiva quando il suo argomento è > 1. Il sistema, quindi, diventa

$$\begin{cases} \sqrt{\ln|x| - x^2 + 5x - 3} & > & 0 \\ \ln|x| - x^2 + 5x - 3 & \geq & 0 \\ \sqrt{\ln|x| - x^2 + 5x - 3} & > & 1 \end{cases}$$

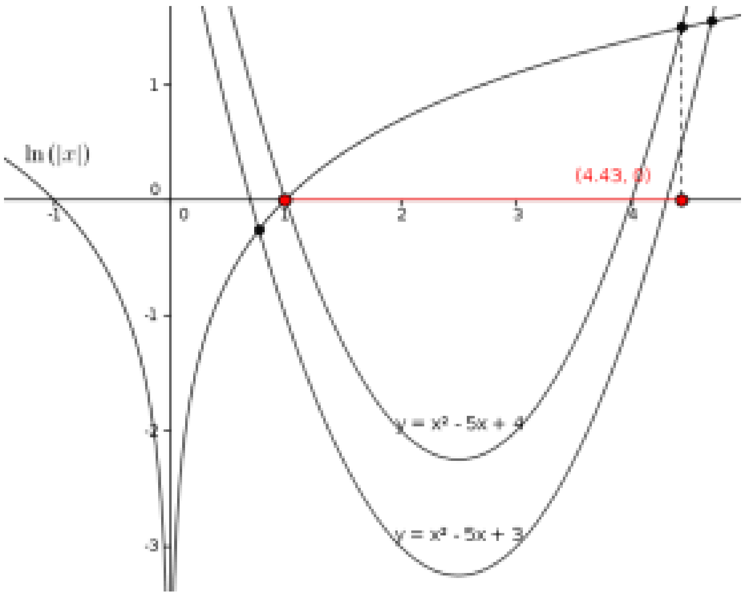
Il sistema cerca le soluzioni comuni tra più disequazioni, pertanto, la prima disequazione può essere trascurata e il sistema diviene, elevando al quadrato entrambi i membri della terza disequazione

$$\begin{cases} \ln|x| - x^2 + 5x - 3 & \geq & 0 \\ \ln|x| - x^2 + 5x - 3 & > & 1 \end{cases}$$

Il sistema può essere riscritto nella forma

$$\begin{cases} \ln|x| & \geq & x^2 - 5x + 3 \\ \ln|x| & > & x^2 - 5x + 4 \end{cases}$$

È quindi possibile affrontare la soluzione di queste disequazioni trascendenti con il metodo grafico, rappresentando le funzioni $y = \ln|x|$ e le due parabole $y = x^2 - 5x + 3$ e $y = x^2 - 5x + 4$. La figura mostra la rappresentazione grafica di tutte le funzioni e l'intervallo delle soluzioni. (Si potrebbe considerare solo la seconda disequazione, avendo le due parabole lo stesso asse di simmetria)



Esercizio 12. Determinare, se esistono, i punti di massimo e minimo della funzione $z = f(x, y) = \sqrt{(x+y)(y - x^2 - x)}$

Soluzione. La condizione necessaria richiede che esistano e siano nulle le derivate rispetto a x e y, per cui

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-3x^2 - 2x - 2xy}{2\sqrt{(x+y)(y-x^2-x)}}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y - x^2}{2\sqrt{(x+y)(y-x^2-x)}}$$

Le derivate si annullano contemporaneamente se

$$\begin{cases} 3x^2 + 2x + 2xy = 0 \\ 2y - x^2 = 0 \end{cases}$$

risolviamo il sistema per determinare i punti stazionari

$$\begin{cases} 3x^2 + 2x + x^3 = 0 \\ y = \frac{x^2}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x\left(x^2 + 3x + 2\right) = 0 \\ y = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

le soluzioni saranno rappresentate dai tre punti $P_1(0; 0)$, $P_2\left(-1; \frac{1}{2}\right)$, $P_3(-2; 2)$
La derivata prima **non è definita** in alcun punto P, perché il radicando è ≤ 0. La condizione sufficiente richiederebbe che esistano le derivate seconde nei punti trovati tali che, detti $A = f''_{xx}(x_p, y_p)$, $B = f''_{xy}(x_p, y_p)$, $C = f''_{yy}(x_p, y_p)$, se il discriminante, $\Delta = AC - B^2 > 0$ il punto P sarà un max se $A < 0$ (o $C < 0$, un minimo se $A > 0$ (o $C > 0$). Non eseguiamo pertanto il calcolo delle derivate seconde nei punti stazionari. la funzione non avrà né max né min.

Esercizio 13. Risolvere la seguente equazione differenziale $y' - x\sin x\left(y^2 - 4y - 5\right) = 0$

Soluzione. Equazione del primo ordine a variabili separabili.

$$\frac{dy}{(y^2 - 4y - 5)} = x\sin x dx$$

integrando entrambi i membri

$$\int \frac{dy}{(y^2 - 4y - 5)} = \int x\sin x dx$$

Calcoliamo l'integrale della funzione razionale al primo membro, dopo aver scomposto il denominatore

$$\int \frac{dy}{(y-5)(y1-1)} \qquad \textit{si ha} \qquad \frac{1}{(y-5)(y11)} = \frac{A}{y-5} + \frac{B}{y+1}$$

$$1 = y(A+B) + (A - 5B)$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A - 5B = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} A = \frac{1}{6} \\ B = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

da cui

$$\frac{1}{6}\int \frac{dy}{(y-5)} - \frac{1}{6}\int \frac{dy}{y+1} = \int x\sin x dx$$

risolviamo l'integrale al secondo membro per parti, osservando che $\sin x dx = d(-\cos x)$

$$\frac{1}{6}\int \frac{dy}{(y-5)} - \frac{1}{6}\int \frac{dy}{y+1} = -x\cos x + \int \cos x dx$$

avremo

$$\ln\left|\frac{y-5}{y+1}\right| = 6(-x\cos x + \sin x + C)$$

$$\frac{y-5}{y+1} = e^{6(-x\cos x + \sin x + C)}$$

$$\frac{y-5}{y+1} - 1 = e^{6(-x\cos x + \sin x + C)} - 1$$

$$-\frac{6}{y+1} = e^{6(-x\cos x + \sin x + C)} - 1$$

da cui

$$y = \frac{-6}{e^{6(-x\cos x + \sin x + C)} - 1} - 1 = \frac{5 + e^{6(-x\cos x + \sin x + C)}}{1 - e^{6(-x\cos x + \sin x + C)}}$$

Esercizio 14. Studiare le caratteristiche della seguente funzione e tracciarne il grafico

$$y = \frac{|x|}{x} - \frac{x-5}{\sqrt{x^2+5}}$$

Soluzione. Determiniamo il C.E della funzione: la radice al denominatore è sempre positiva per cui $C.E : \mathbb{R}_0$. La presenza del modulo richiede di distinguere i casi in cui la variabile indipendente è positiva o negativa.

1° caso) $x > 0$, la funzione diviene

$$y = 1 - \frac{x-5}{\sqrt{x^2+5}}$$

essa non può intersecare l'asse y per le C.E e non interseca nemmeno l'asse x, come si vede dal calcolo

$$\begin{cases} 1 = \frac{x-5}{\sqrt{x^2+5}} \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{x^2+5} = x - 5 \\ x^2 + 5 \geq 0 \\ x - 5 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ \forall x \\ x \geq 5 \end{cases}$$

Studiamo il segno della funzione per stabilire gli intervalli in cui è positiva e negativa:

$$1 - \frac{x-5}{\sqrt{x^2+5}} > 0 \qquad \frac{\sqrt{x^2+5} - x + 5}{\sqrt{x^2+5}} > 0$$

$$N>0 \qquad \sqrt{x^2+5}>x-5$$
$$\left\{\begin{array}{l} x-5\geq 0 \\ x^2+5>(x-5)^2 \end{array}\right. \cup \left\{\begin{array}{l} x-5<0 \\ x^2+5>0 \end{array}\right.$$
$$\left\{\begin{array}{l} x\geq 5 \\ x>2 \end{array}\right. \cup \left\{\begin{array}{l} x<5 \\ \forall x\in C.E \end{array}\right.$$
$$x\geq 5\cup x<5 \ \ (x\neq 0)$$
$$D>0 \qquad \forall x\in C.E$$

la funzione risulta quindi sempre positiva.

Cerchiamo eventuali asintoti

$$\lim_{x\to+\infty} 1-\frac{x-5}{\sqrt{x^2+5}}=\lim_{x\to+\infty} 1-\frac{x\left(1-\frac{5}{x}\right)}{x\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}}=0$$
$$\lim_{x\to 0^+} 1-\frac{x-5}{\sqrt{x^2+5}}=1+\sqrt{5}$$

avremo quindi un asintoto orizzontale di equazione $x=0$, cioè l'asse delle ascisse.

Cerchiamo ora eventuali punti stazionari, calcolando la derivata prima della funzione

$$y'=-\frac{\sqrt{x^2+5}-(x-5)\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+5}}}{x^2+5}=\frac{-5x-5}{\left(x^2+5\right)^{\frac{3}{2}}}$$

la derivata è sempre definita nel campo di esistenza. Studiamo il suo suo segno, osservando che il denominatore è sempre positivo, per cui la derivata prima risulta positiva per $x<-1$, cioè la funzione è sempre decrescente nell'intervallo $x>0$.

Cerchiamo eventuali flessi calcolando la derivata seconda

$$y"=\frac{-5\left(x^2+5\right)^{\frac{3}{2}}+15\left(x+1\right)\left(x^2+5\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x^2+5\right)^3}=\frac{5\left(x^2+5\right)^{\frac{1}{2}}\left(2x^2+3x-5\right)}{\left(x^2+5\right)^3}=\frac{5\left(2x^2+3x-5\right)}{\left(x^2+5\right)^{\frac{5}{2}}}$$

la derivata seconda si annulla quando $2x^2+3x-5=0$, cioè per $x=1$ e $x=-\frac{5}{2}$, quest'ultimo non nell'intervallo $x>0$. Avremo quindi un flesso nel punto $F\left(1;\frac{3+2\sqrt{6}}{6}\simeq 1,32\right)$

2°) caso per $x<0$, la funzione diventa

$$y=-1-\frac{x-5}{\sqrt{x^2+5}}$$

anche in questo caso non abbiamo intersezioni con gli assi, in quanto il valore $x=2$ non appartiene all'intervallo $x<0$.

Studiamo il segno della funzione per stabilire gli intervalli in cui è positiva e negativa:

$$-1-\frac{x-5}{\sqrt{x^2+5}}>0 \qquad \frac{\sqrt{x^2+5}+x-5}{\sqrt{x^2+5}}<0$$

$$N>0 \qquad \sqrt{x^2+5}>5-x$$
$$\left\{\begin{array}{l} 5-x\geq 0 \\ x^2+5>(5-x)^2 \end{array}\right. \cup \left\{\begin{array}{l} 5-x<0 \\ x^2+5>0 \end{array}\right.$$
$$\left\{\begin{array}{l} x\leq 5 \\ x>2 \end{array}\right. \cup \left\{\begin{array}{l} x>5 \\ \forall x\in C.E \end{array}\right.$$
$$2<x\leq 5\cup x>5$$
$$D>0 \qquad \forall x\in C.E$$

la funzione risulta quindi positiva per $x<2$ e quindi nell'intervallo $x<0$ sarà sempre positiva.

Cerchiamo eventuali asintoti

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-1-\frac{x-5}{\sqrt{x^2+5}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-1-\frac{x\left(1-\frac{5}{x}\right)}{x\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}}\right)=0$$
$$\lim_{x\to 0^-}\left(-1-\frac{x-5}{\sqrt{x^2+5}}\right)=\sqrt{5}-1$$

avremo quindi un asintoto orizzontale di equazione $x=0$, cioè l'asse delle ascisse.

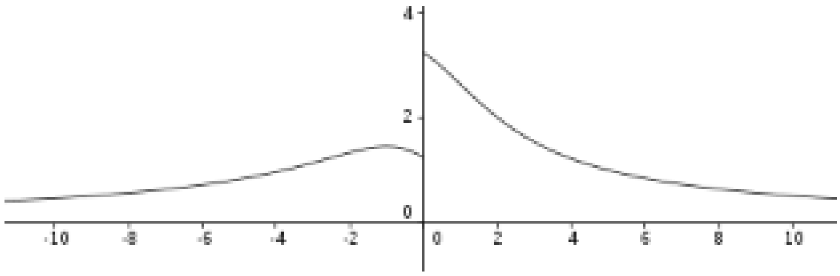
Nella ricerca di eventuali punti stazionari, osserviamo che la derivata prima della funzione è identica a quella già calcolata prima e quindi avremo

$$y'>0 \quad per \quad x<-1$$
$$y'<0 \quad per \quad -1<x<0$$

la funzione avrà quindi un massimo $M\left(-1;\sqrt{6-1}\simeq 1,45\right)$

Anche la derivata seconda è uguale alla precedente e avremo questa volta un flesso $F_2\left(-\frac{5}{2};\sqrt{5}-1\simeq 1,24\right)$

Il grafico della funzione completa è mostrato nella figura sotto. La funzione presenta una discontinuità di prima specie nel punto di ascissa $x=0$ con un salto $\Delta y=2$



Esercizio 15. Determinare le specie di discontinuità in $x=0$ e $x=1$ della funzione

$$y=\frac{1-\ln|x|}{1+\ln^2|x|}-\frac{x+1}{x-1}$$

Soluzione. Calcoliamo il limite destro e sinistro nei due punti indicati

$$\begin{array}{c} \lim_{x\to 1^-}\frac{1-\ln|x|}{1+\ln^2|x|}-\frac{x+1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}1-\frac{2}{0^-}=+\infty \\ \lim_{x\to 1^+}\frac{1-\ln|x|}{1+\ln^2|x|}-\frac{x+1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}1-\frac{2}{0^+}=-\infty \end{array}$$

la discontinuità è pertanto di seconda specie

$$\begin{array}{c} \lim_{x\to 0^-}\frac{1-\ln|x|}{1+\ln^2|x|}-\frac{x+1}{x-1}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\frac{1}{|x|}}{\frac{2\ln|x|}{|x|}}+1=\lim_{x\to 0^-}\frac{-1}{2\ln|x|}+1=1 \\ \lim_{x\to 0^+}\frac{1-\ln|x|}{1+\ln^2|x|}-\frac{x+1}{x-1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{|x|}}{\frac{2\ln|x|}{|x|}}-1=\lim_{x\to 0^-}\frac{-1}{2\ln|x|}-1=-1 \end{array}$$

si ha quindi una discontinuità di prima specie con un salto pari a $-1-1=-2$

Esercizio 16. Determinare l'insieme di definizione della seguente funzione

$$z=\frac{\sqrt{y^2-x^2}+\ln\left(4-x^2-y^2\right)}{\sqrt{xy}+1}$$

Soluzione. L'insieme di definizione si ottiene risolvendo il sistema che raggruppa tutte le condizioni di esistenza per i radicali, il logaritmo e la frazione

$$\begin{cases} x^2-y^2\leq 0 \\ x^2+y^2-4<0 \\ xy\geq 0 \\ \sqrt{xy}+1\neq 0 \end{cases}$$

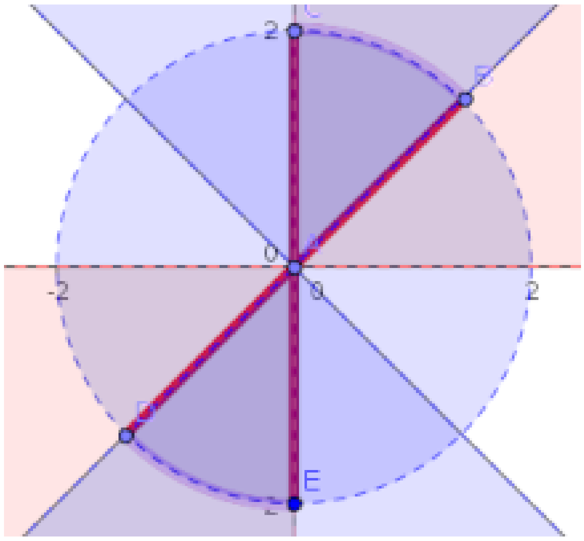
la prima disequazione ($x^2-y^2=0$ è una iperbole degenere nelle due bisettrici dei quadranti) ha come soluzioni la parte di piano compresa tra le due bisettrici dei quadranti dove $|y|>|x|$;

la seconda disequazione ha come soluzioni l'insieme dei punti interni del cerchio di centro O e raggio 2

la terza disequazione ha come soluzioni i punti del 1° e 3° quadrante dove x e y hanno lo stesso segno

l'ultima disequazione è sempre vera se si considera vera la terza.

La figura mostra la parte di piano, delimitata dalle linee rosse e dall'arco di circonferenza non compreso, dove le coordinate dei punti soddisfano la funzione data



Esercizio 17. Determinare gli integrali di $y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$

Soluzione. Equazione del tipo $y' + P(x)y = Q(x)$. Risolviamo introducendo due funzioni, dipendenti da x, tali che $y = uv$, e derivando si ha $y' = u'v + uv'$. Sostituiamo nell'equazione data

$$u'v + uv' + uv\cos x = \sin x \cos x$$

cioè

$$uv' + v(u' + u\cos x) = \sin x \cos x$$

imponiamo $u' + u\cos x = 0$, da cui otteniamo, separando le variabili

$$\frac{du}{u} = -\cos x dx \qquad \int \frac{du}{u} = -\int \cos x dx$$

$$\ln|u| = -\sin x \qquad u = e^{-\sin x}$$

sostituiamo per ottenere v

$$e^{-\sin x} v' = \sin x \cos x$$

e di nuovo, separando le variabili

$$dv = \frac{\sin x \cos x}{e^{-\sin x}} \qquad \int dv = \int \frac{\sin x \cos x}{e^{-\sin x}} dx$$

$$v = \int e^{\sin x} \sin x \cos x dx$$

poniamo $t = \sin x$, per cui $dt = \cos x dx$, l'integrale diviene $v = \int te^t dt$; integriamo per parti:

$$v = te^t - \int e^t dt = e^t(t-1) = e^{\sin x}(\sin x - 1)$$

da cui

$$y = uv = e^{-\sin x} \cdot \left(e^{\sin x}(\sin x - 1) + C\right) = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x}$$

Esercizio 18. Calcolare il campo di esistenza e le derivate parziali prime di

$$f(x,y) = \sqrt{-(x^2+y^2+2x)} + \ln \frac{1+xy}{y-x^2+1}$$

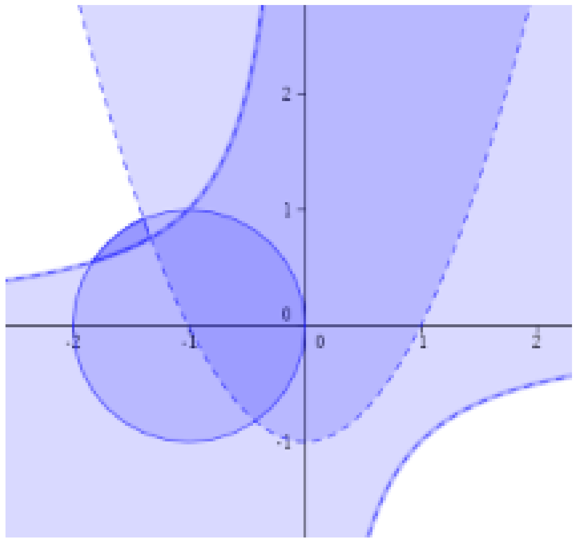
Soluzione. la determinazione del campo di esistenza passa attraverso la risoluzione del seguente sistema che contiene le condizioni affinché esistano il radicale e il logaritmo

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x \le 0 \\ \frac{1+xy}{y-x^2+1} > 0 \end{cases}$$

La prima disequazione è verificata per tutti i punti del cerchio, comprensivi della circonferenza. Risolviamo la seconda disequazione

$$N > 0 \qquad xy > -1$$
$$D > 0 \qquad y > x^2 - 1$$

la prima disequazione raggruppa i punti del piano delimitati dall'iperbole equilatera riferita agli asintoti $xy = -1$; la seconda i punti interni alla parabola $y = x^2 - 1$ di vertice $0; -1$ e passante per i punti $-1; 0$ e $1; 0$. La figura mostra la parte di piano che rappresenta l'insieme dei punti del C.E. (È la parte con il colore più marcato)



Esercizio 19. Tracciare il grafico della funzione

$$y = \left|1 - \sqrt[3]{e^{x-1}}\right|$$

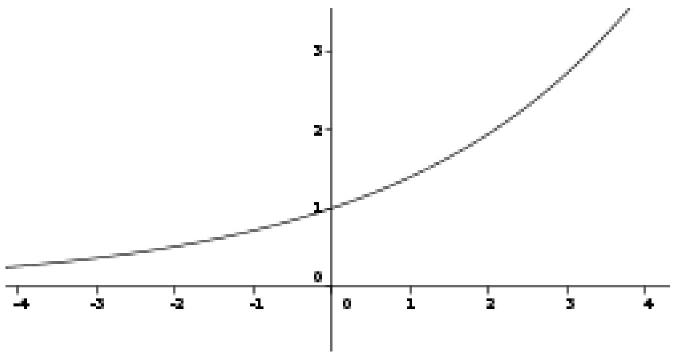
e scrivere le equazioni delle tangenti alla curva negli eventuali punti di intersezione con gli assi coordinati.

Soluzione. questa funzione può essere studiata nelle forme tradizionali. Si può ottenere il suo grafico molto più rapidamente costruendola mediante successive trasformazioni, riscrivendo la funzione nella forma

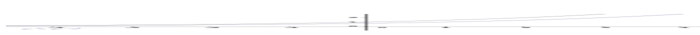
$$y = \left|1 - \frac{1}{\sqrt[3]{e}} \cdot e^{\frac{x}{3}}\right|$$

- La nostra funzione di partenza sarà $y = e^x$, funzione che consideriamo nota

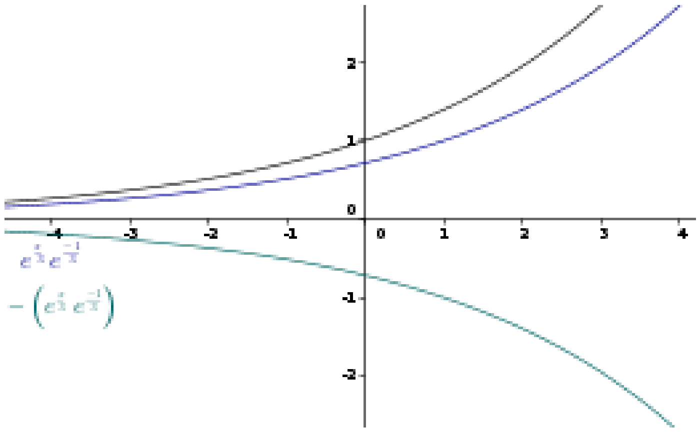
rappresentiamo $y = e^{\frac{x}{3}}$, applicando una dilatazione orizzontale: la forma grafica sarà



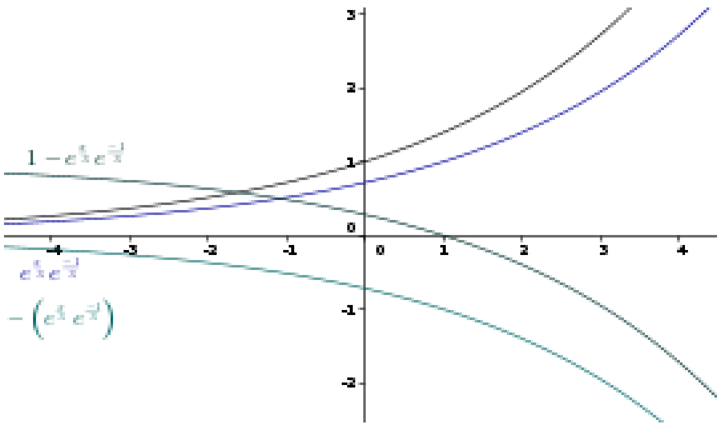
- rappresentiamo ora $y = \frac{1}{\sqrt[3]{e}} \cdot e^{\frac{x}{3}}$, una dilatazione verticale



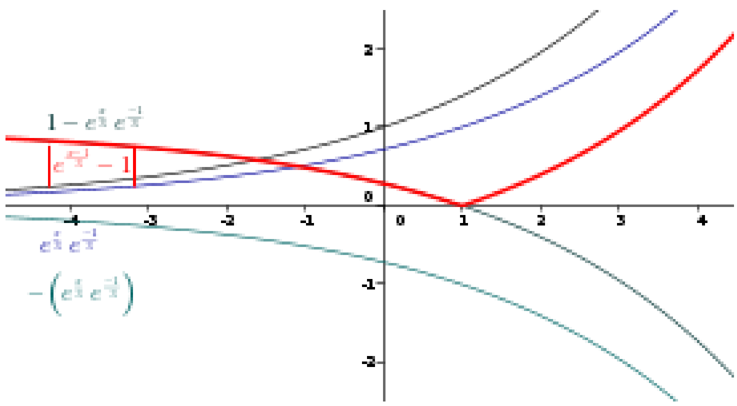
- Costruiamo la simmetrica rispetto all'asse delle x, $y = -\frac{1}{\sqrt[3]{e}} \cdot e^{\frac{x}{3}}$



- operiamo una traslazione verticale verso l'alto di vettore $(0;1)$



- costruiamo il simmetrico rispetto all'asse x della parte negativa della funzione



La funzione interseca gli assi nei punti

$$asse\,x \quad \begin{cases} x=0 \\ y=1-\sqrt[3]{\frac{1}{e}} \simeq 0.28 \end{cases}$$

$$asse\,y \quad \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$$

Si può osservare che il punto di coordinate $(1;0)$ è un punto angoloso. Infatti calcolando le due derivate si ottengono due tangenti diverse.

$$per\,x \leq 1 \quad y' = -\tfrac{1}{3}\frac{e^{\frac{x}{3}}}{e^{\frac{1}{3}}} \quad y'(1) = -\frac{1}{3}$$

$$per\,x > 1 \quad y' = \tfrac{1}{3}\frac{e^{\frac{x}{3}}}{e^{\frac{1}{3}}} \quad y'(1) = \frac{1}{3}$$

le rette tangenti avranno equazioni $y = \pm\frac{1}{3}(x-1)$

La derivata nel punto $\left(0; 1 - \sqrt[3]{\frac{1}{e}}\right)$ avrà valore $y'(0) = -\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}}$ e l'equazione della tangente sarà $y = -\frac{1}{3\sqrt[3]{e}}x + 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$

Esercizio 20. Dopo aver calcolato gli integrali dell'equazione differenziale $yy' = y^2xe^x$, calcolare l'integrale particolare che soddisfa la condizione $y(1) = \frac{1}{2}$.

Soluzione. Risolviamo con il metodo delle variabili separabili

$$\frac{y}{y^2}dy = xe^x dx$$

e integrando

$$\frac{1}{2}\int \frac{2ydy}{y^2} = \int xe^x dx$$

da cui, integrando per parti l'integrale al secondo membro

$$\frac{1}{2}\ln\left|y^2\right| = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C$$

risolviamo rispetto a y

$$y = C_1 e^{e^x(x-1)}$$

dove $C_1 = e^c$. L'integrale particolare sarà, sostituendo $\frac{1}{2} = C_1 e^{e \cdot 0} = C_1$

$$y = \frac{1}{2}e^{e^x(x-1)}$$

Esercizio 21. Risolvere nel campo reale la seguente disequazione $\sqrt{|x+1| + \frac{6}{x}} < 1$

Soluzione. La disequazione si divide in due parti a seconda del segno di $x+1$, per cui

1) $x \geq -1$, la disequazione diventa $\sqrt{\frac{x^2+x+6}{x}} < 1$. Poiché 1 è sempre maggiore di 0, basterà che

$$\begin{cases} \frac{x^2+x+6}{x} < 1 \\ \frac{x^2+x+6}{x} \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x^2+6}{x} < 0 \\ \frac{x^2+x+6}{x} \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} 1^a\, diseq & \begin{array}{ll} N > 0 & \forall x \in \mathbb{R} \\ D > 0 & x > 0 \end{array} \\ & -1 < x < 0 \\ 2^a diseq & \begin{array}{ll} N \geq 0 & \forall x \in \mathbb{R} \\ D > 0 & x > 0 \end{array} \\ & x > 0 \end{array}$$

il sistema non ha soluzioni

2) $x < -1$, la disequazione diventa $\sqrt{\frac{-x^2-x+6}{x}} < 1$, per cui

$$\begin{cases} \frac{-x^2-x+6}{x} < 1 \\ \frac{-x^2-x+6}{x} \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{-x^2-2x+6}{x} < 0 \\ \frac{-x^2-x+6}{x} \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} 1^a\, diseq & \begin{array}{ll} N > 0 & -1-\sqrt{7} < x < -1+\sqrt{7} \\ D > 0 & x > 0 \end{array} \\ & -1-\sqrt{7} < x < -1 \\ 2^a\, diseq & \begin{array}{ll} N > 0 & -3 \leq x \leq 2 \\ D > 0 & x > 0 \end{array} \\ & x \leq -3 \end{array}$$

la soluzione comune del sistema sarà rappresentata dall'intervallo $-1-\sqrt{7} < x \leq -3$

Esercizio 22. Trovare l'integrale che soddisfa la condizione $x \neq 3$ e la condizione iniziale $y(0) = 0$, della seguente equazione differenziale

$$x(y-1) = (x-3)^2 y'$$

Soluzione. risolviamo separando le variabili e integrando entrambi i membri

$$\frac{dy}{y-1}=\frac{x}{(x-3)^2}dx \qquad \int\frac{dy}{y-1}=\int\frac{x}{(x-3)^2}dx$$

$$\ln|y-1|=\int\frac{x-3}{(x-3)^2}dx+3\int\frac{dx}{(x-3)^2} \qquad \ln|y-1|=\ln|(x-3)|-\frac{3}{x-3}+C$$

la soluzione sarà

$$y-1=C_1\,(x-3)^2\,e^{\frac{1}{3-x}} \qquad y=C_1\,(x-3)^2\,e^{\frac{1}{3-x}}+1$$

se $x\neq 3$, allora $y(0)=C_2e^{\frac{1}{3}}+1$

Esercizio 23. Studiare la funzione seguente e tracciarne il grafico

$$y=\sqrt{-\ln\frac{2x+5}{9}}$$

Soluzione. applicando le proprietà dei logaritmi, riscriviamo la funzione nella forma

$$y=\sqrt{\ln\left(\frac{2x+5}{9}\right)^{-1}}=\sqrt{\ln\frac{9}{2x+5}}$$

- **Campo di Esistenza**: la radice quadrata esiste se il radicando non è negativo; il logaritmo esiste se il suo argomento è maggiore di zero

$$\begin{cases}\ln\frac{9}{2x+5}\geq 0\\ \frac{9}{2x+5}>0\end{cases} \qquad \begin{cases}\frac{9}{2x+5}\geq 1\\ \frac{9}{2x+5}>0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{4-2x}{2x+5}\geq 0\\ x>-\frac{5}{2}\end{cases} \qquad \begin{cases}N\geq 0 \;x\leq 2\\ D>0\;x>-\frac{5}{2}\\ x>-\frac{5}{2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}-\frac{5}{2}<x\leq 2\\ x>-\frac{5}{2}\end{cases} \qquad C.E:-\frac{5}{2}<x\leq 2$$

- **Intersezioni con assi**: calcoliamo le intersezioni con l'asse x

$$\begin{cases}\ln\frac{9}{2x+5}=0\\ y=0\end{cases} \qquad \begin{cases}\frac{9}{2x+5}=1\\ y=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=2\\ y=0\end{cases} \qquad P(2;0)$$

intersezioni con l'asse y

$$\begin{cases}x=0\\ y=\ln\frac{9}{5}\end{cases} \qquad Q\left(0;\ln\frac{9}{5}\simeq 0.6\right)$$

- **Asintoti**: calcoliamo i limiti agli estremi del campo di esistenza

$$\lim_{x\to-\frac{5}{2}^+}\sqrt{\ln\frac{9}{2x+5}}=+\infty \qquad \lim_{x\to 2}\sqrt{\ln\frac{9}{2x+5}}=0$$

avremo un asintoto verticale di equazione $x=-\frac{5}{2}$

- **Segno della funzione**: studiamo dove la funzione assume valori positivi e negativi

$$\sqrt{\ln\frac{9}{2x+5}}>0 \qquad \forall x\in C.E.$$

la funzione sarà quindi sempre positiva

- **Punti stazionari, crescenza e decrescenza**: calcoliamo la derivata prima della funzione

$$y'=\frac{\frac{2x+5}{9}\cdot\frac{-18}{(2x+5)^2}}{2\sqrt{\ln\frac{9}{2x+5}}} \qquad y'=-\frac{1}{(2x+5)\sqrt{\ln\frac{9}{2x+5}}}$$

la derivata prima non si annulla mai e quindi la funzione è sempre crescente.

- **Flessi**: calcoliamo la derivata seconda

$$y" = \frac{-2\sqrt{\ln\frac{9}{2x+5}} - (2x+5)\frac{\frac{2x+5}{9}\cdot\frac{-18}{(2x+5)^2}}{2\sqrt{\ln\frac{9}{2x+5}}}}{4(2x+5)^2\ln\frac{9}{2x+5}} \qquad y" = \frac{-2\sqrt{\ln\frac{9}{2x+5}} + \frac{1}{\sqrt{\ln\frac{9}{2x+5}}}}{4(2x+5)^2\ln\frac{9}{2x+5}}$$

$$y" = \frac{-2\ln\frac{9}{2x+5}+1}{4(2x+5)^2\ln\frac{9}{2x+5}\sqrt{\ln\frac{9}{2x+5}}}$$

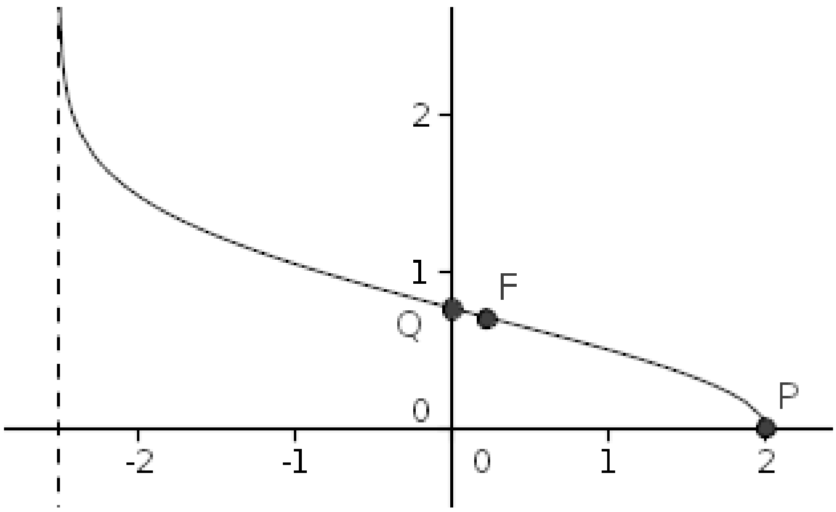
la derivata seconda si annulla se

$$-2\ln\frac{9}{2x+5}+1=0 \qquad \ln\frac{9}{2x+5}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{9}{2x+5}=\sqrt{e} \qquad x=\frac{9-5\sqrt{e}}{2\sqrt{e}}\simeq 0.23$$

la funzione avrà un flesso nel punto $F\left(\frac{9-5\sqrt{e}}{2\sqrt{e}};\sqrt{\frac{1}{2}}\simeq 0.71\right)$. Infatti $F_y=\sqrt{\ln\left(\frac{9}{\frac{9-5\sqrt{e}}{\sqrt{e}}+5}\right)=\ln\frac{9\sqrt{e}}{9}}=\sqrt{\frac{1}{2}}$.

- **Rappresentazione grafica**: ecco il grafico della funzione



Esercizio 24. Tracciare il grafico della funzione

$$y = e^{x+1} - \ln|x+1|$$

- **Campo di Esistenza**: la funzione esponenziale è sempre definita, mentre il logaritmo esiste se

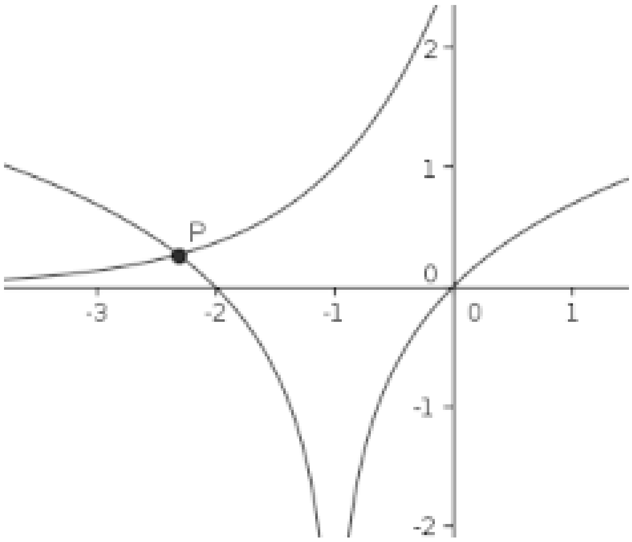
$$x+1\neq 0 \qquad x\neq -1$$

- La funzione non presenta simmetrie rispetto agli assi cartesiani e all'origine. La funzione non è, infatti, né pari né dispari
- **Intersezioni con assi**: intersezione con l'asse delle ascisse

$$\begin{cases} x=0 \\ y=e \end{cases} \qquad A(0;e)$$

$$\begin{cases} e^{x+1}=\ln|x+1| \\ y=0 \end{cases} \qquad P(\alpha;0)$$

risolviamo l'equazione graficamente, rappresentando i due membri due funzioni elementari: e^{x+1} è la funzione e^x traslata verso sinistra di 1, mentre $\ln|x+1|$ è la funzione logaritmica traslata verso destra di 1 e poi estesa con la sua simmetrica rispetto all'asse delle ordinate



la soluzione può essere espressa con $x = \alpha$, dove $-3 < \alpha < -2$.

- **Segno**: il grafico sopra consente anche di discutere il segno della funzione, che si ottiene risolvendo la disequazione $e^{x+1} > \ln|x+1|$. In particolare, $y > 0$ per $x > \alpha$ e $y < 0$ per $x < \alpha$.
- **Asintoti**: calcoliamo i seguenti quattro limiti

$$\lim_{x\to-\infty} e^{x+1} - \ln(-x-1) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} e^{x+1} - \ln(x+1) = +\infty$$
$$\lim_{x\to-1^-} e^{x+1} - \ln(-x-1) = +\infty \qquad \lim_{x\to-1^+} e^{x+1} - \ln(x+1) = +\infty$$

la funzione avrà un asintoto verticale di equazione $x = -1$. Verifichiamo l'eventuale presenza di asintoti obliqui, essendone verificata la condizione necessaria

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{x+1} - \ln(-x-1)}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x+1} - \ln(-x-1)}{x} = +\infty$$

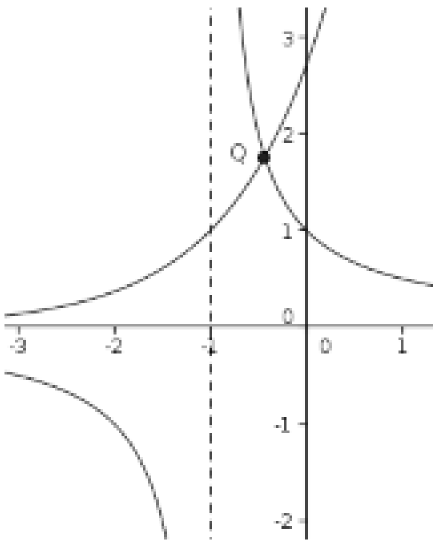
non vi sono asintoti obliqui.
- **Crescenza, decrescenza, punti stazionari**: calcoliamo la derivata prima, ricordando che se $y = \ln|x|$, $y' = \frac{1}{x}$

$$y' = e^{x+1} - \frac{1}{x+1}$$

la derivata non esiste per $x = -1$, quindi ha lo stesso campo di esistenza della funzione. Studiamo il segno della derivata

$$e^{x+1} \geq \frac{1}{x+1}$$

anche in questo caso risolviamo graficamente, essendo il secondo membro un'iperbole traslata



La figura mostra che la funzione esponenziale è maggiore dell'iperbole per $x > \beta$, con $-1 < \beta < 0$. Avremo quindi

$$\begin{aligned} y' > 0 & \quad per \quad x < -1 \vee x > \beta \\ y' = 0 & \quad per \quad x = \beta \\ y' < 0 & \quad per \quad -1 < x < \beta \end{aligned}$$

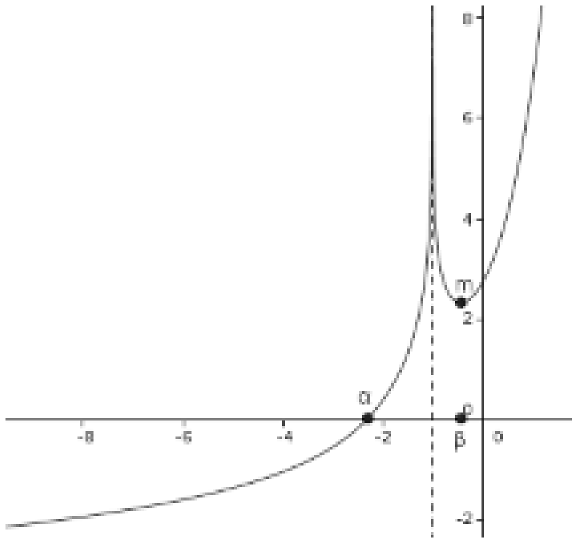
la funzione sarà quindi crescente per $x < -1$ e $x > \beta$, decrescente per $-1 < x < \beta$ e avrà un punto di minimo relativo per $x = \beta$.

- **Flessi**: calcoliamo la derivata seconda

$$y" = e^{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

anche la derivata seconda non è definita per $x = -1$, ma sarà sempre positiva, quindi la funzione avrà concavità sempre rivolta verso l'alto, senza la presenza di flessi.

- **Grafico**: la figura mostra il grafico della funzione data



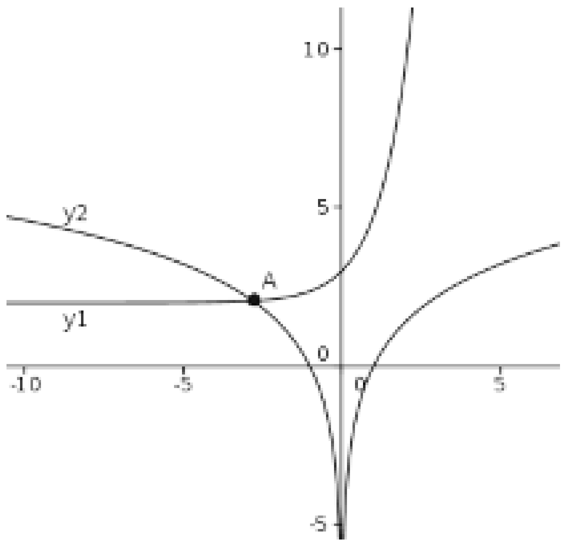
Esercizio 25. Risolvere la disequazione

$$\frac{\ln x^2 - e^x - 2}{e^x + x^2 - 4} \leq 0$$

Soluzione. Il logaritmo esiste se $x \neq 0$. Studiamo separatamente il numeratore e denominatore della frazione data

$$N \geq 0 \qquad \ln x^2 \geq e^x + 2$$

risolviamo graficamente ponendo $y_1 = \ln x^2$ e $y_2 = e^x + 2$, dovrà essere $y_1 \geq y_2$.



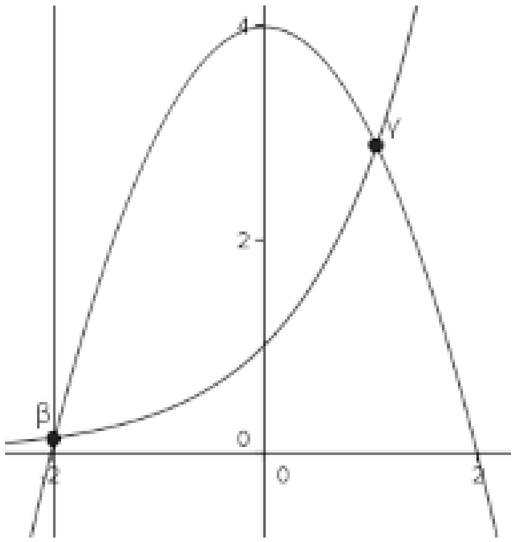
Avremo quindi

$$N \geq 0 \quad per \quad x > \alpha \quad -3 < \alpha < -2$$

Studiamo allo stesso modo il denominatore

$$D > 0 \qquad e^x > 4 - x^2$$

poniamo $y_1 = e^x$ e $y_2 = 4 - x^2$, dovrà essere $y_1 > y_2$.

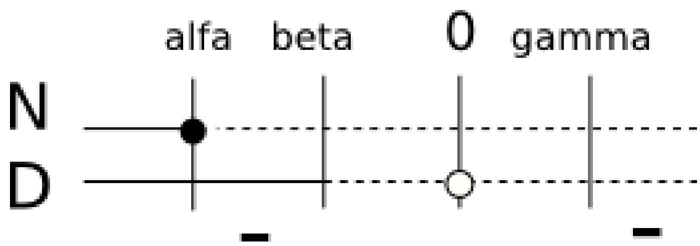


Avremo

$$D > 0 \quad per \quad x < \beta \ \vee \ x > \gamma$$
$$-2 < \beta < -1 \qquad 1 < \gamma < 2$$

Osservando che $\alpha < \beta < \gamma$, avremo le seguenti soluzioni

$$\alpha \leq x \leq \beta \qquad x > \gamma$$



Esercizio 26. Risolvere l'integrale indefinito

$$\int \frac{e^{3x} \arctan e^x}{1 + e^{2x}} dx$$

Soluzione. Applichiamo la sostituzione $e^x = t$, da cui $x = \ln t$ e $dx = \frac{1}{t}$ e avremo

$$\int \frac{t^3 \arctan t}{1 + t^2} \frac{dt}{t} = \int \frac{t^2 \arctan t}{1 + t^2} dt$$

riscriviamo il numeratore

$$\int \frac{\left(t^2 + 1 - 1\right) \arctan t}{1 + t^2} dt = \int \arctan t dt - \int \frac{\arctan t}{1 + t^2} dt =$$

risolviamo il primo integrale per parti,

$$= t \arctan t - \int \frac{t}{1 + t^2} dt - \int \arctan t \cdot d\left(\arctan t\right) =$$

$$= t\arctan t - \frac{1}{2}\int \frac{2t}{1+t^2}dt - \frac{\arctan^2 t}{2} = t\arctan t - \frac{1}{2}\ln\left|1+t^2\right| - \frac{\arctan^2 t}{2}$$

infatti ($\int \frac{2t}{1+t^2}dt = \int \frac{f'(t)}{f(t)}dt = \ln|f(t)|$). Sostituendo il valore di x, otteniamo

$$\int \frac{e^{3x}\arctan e^x}{1+e^{2x}}dx = e^x\arctan e^x - \frac{1}{2}\ln\left(1+e^{2x}\right) - \frac{1}{2}\arctan^2 e^x + C$$

Esercizio 27. Determinare l'insieme di definizione, la natura dei punti di frontiera e le derivate parziali prime della funzione

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{(x^2+y^2)-9}{(x-1)(y-e^x)}}$$

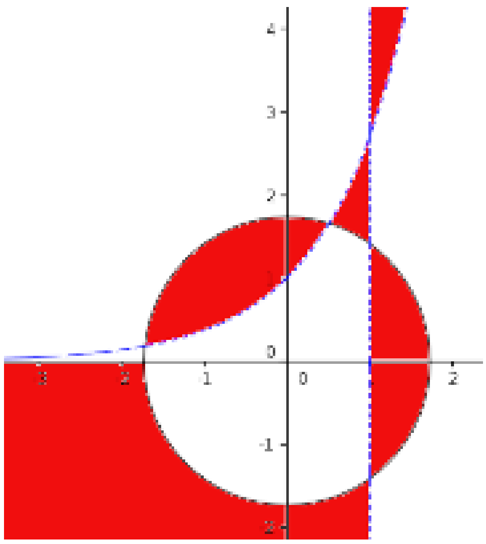
possiamo riscrivere la funzione applicando le semplici regole algebriche dei prodotti notevoli

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{(x^2+y^2+3)(x^2+y^2-3)}{(x-1)(y-e^x)}}$$

e osservare che il fattore $\left(x^2+y^2+3\right)$ al numeratore è sempre positivo. L'insieme di definizione sarà calcolabile tramite il sistema che contiene le condizioni che rendono il radicando non negativo e il denominatore della frazione non nullo

$$\begin{cases} 1^a & \frac{\left(x^2+y^2-3\right)}{(x-1)(y-e^x)} \geq 0 \\ 2^a & x-1>0 \\ 3^a & y-e^x>0 \end{cases}$$

studiamo graficamente le tre disequazioni e



le soluzioni comuni: il polinomio x^2+y^2-3numeratore può essere rappresentato come una circonferenza di raggio $\sqrt{3}$ e centrata nell'origine; $x-1$ è una retta parallela all'asse y e $y-e^x$ è la funzione esponenziale, sempre positiva

i punti di intersezione della circonferenza con la retta e l'esponenziale sono da considerarsi esclusi.

Calcoliamo le derivate parziali prime

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{(x^2+y^2)^2-9}{(x-1)(y-e^x)}}} \cdot \frac{4x\left(x^2+y^2\right)(x-1)(y-e^x)-[(y-e^x-e^x(x-1))]\left[\left(x^2+y^2\right)^2-9\right]}{(x-1)^2(y-e^x)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{(x^2+y^2)^2-9}{(x-1)(y-e^x)}}} \cdot \frac{4y\left(x^2+y^2\right)(x-1)(y-e^x)-(x-1)\left[\left(x^2+y^2\right)^2-9\right]}{(x-1)^2(y-e^x)^2}$$

Esercizio 28. Studiare l'andamento e tracciare il grafico della funzione $y = \sqrt[3]{\ln^2|x-1|}$

Soluzione. Campo di Esistenza: la radice cubica esiste sempre, mentre il logaritmo solo se il suo argomento è diverso da zero, cioè

$$x \neq 1 \qquad (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$$

la presenza del modulo implica che si studi la funzione

$$y = \begin{cases} \sqrt[3]{\ln^2(x-1)} & x > 1 \\ \sqrt[3]{\ln^2(1-x)} & x < 1 \end{cases}$$

1°) Studio della funzione $y = \sqrt[3]{\ln^2(1-x)}$ nell'intervallo $(-\infty; 1)$

Intersezioni con gli assi: asse y: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Segno: $y \geq 0$ per ogni x appartenente all'intervallo (il logaritmo è infatti sempre positivo)

Asintoti: calcoliamo i limiti

$$\lim_{x \to -\infty} y = +\infty \qquad \lim_{x \to 1^-} y = +\infty$$

avremo quindi un asintoto verticale di equazione $x = 1$. L'asintoto obliquo non esiste in quanto

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{y}{x} = 0$$

Crescenza, decrescenza, punti stazionari: calcoliamo la derivata prima della funzione

$$y' = \frac{2}{3} \ln^{-\frac{1}{3}}(1-x) \cdot \frac{-1}{1-x} = \frac{2}{3(x-1)\ln^{\frac{1}{3}}(1-x)}$$

C.E della derivata: $x \neq 1, 0$. Per studiare il segno della derivata prima, basta considerare il denominatore $3(x-1)\ln^{\frac{1}{3}}(1-x) > 0$ nell'intervallo $x < 1$

$$\begin{array}{lll} 1° \, fattore < 0 & & \forall x < 1 \\ 2° \, fattore < 0 & \ln^{\frac{1}{3}}(1-x) < 0 & x > 0 \end{array}$$

avremo quindi $y' > 0$ per $0 < x < 1$ e la funzione sarà crescente; $y' < 0$ per $x < 0$ e la funzione sarà decrescente. Studiamo la derivata nel punto $x = 0$ nei due intervalli, in quanto la derivata non è definita per $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0^-} y' = -\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} y' = +\infty$$

Il punto $(0; 0)$ è punto di cuspide e minimo assoluto.

Flessi: calcoliamo la derivata seconda

$$y" = \frac{2}{3} \cdot \frac{-\left[\ln^{\frac{1}{3}}(1-x) + \frac{1}{3}(x-1)\ln^{-\frac{2}{3}}(1-x) \cdot \frac{1}{x-1}\right]}{(x-1)^2 \ln^{\frac{2}{3}}(1-x)} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{3\ln(1-x) + 1}{(x-1)^2 \ln^{\frac{4}{3}}(1-x)}$$

studiamo il segno della derivata seconda attraverso il segno del suo numeratore, essendo il denominatore sempre positivo

$$\begin{array}{ll} y" \geq 0 & 3\ln(1-x) + 1 \leq 0 \\ & \ln(1-x) \leq -\dfrac{1}{3} \\ & x \geq 1 - \sqrt[3]{\dfrac{1}{e}} \sim 0,28 \end{array}$$

La funzione presenta una concavità verso il basso negli intervalli $x < 0$ e $0 < x < 1 - \sqrt[3]{\frac{1}{e}}$; presenta concavità verso l'alto nell'intervallo $1 - \sqrt[3]{\frac{1}{e}} < x < 1$. Avremo, quindi, un flesso ascendente $F_1\left(1 - \sqrt[3]{\frac{1}{e}}; \sqrt[3]{\frac{1}{9}}\right)$.

2°) Studio della funzione $y = \sqrt[3]{\ln^2(x-1)}$ nell'intervallo $(1; +\infty)$

Intersezioni con gli assi: asse y: $\begin{cases} 0 = \ln^2(x-1) \\ y = 0 \end{cases}$,da cui $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$

Segno: $y \geq 0$ per ogni x appartenente all'intervallo (il logaritmo è infatti sempre positivo)

Asintoti: calcoliamo i limiti

$$\lim_{x \to 1^+} y = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} y = +\infty$$

avremo quindi un asintoto verticale di equazione $x = 1$. L'asintoto obliquo non esiste in quanto

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{y}{x} = 0$$

Crescenza, decrescenza, punti stazionari: calcoliamo la derivata prima della funzione

$$y' = \frac{2}{3}\ln^{-\frac{1}{3}}(x-1)\cdot\frac{1}{x-1} = \frac{2}{3(x-1)\ln^{\frac{1}{3}}(x-1)}$$

C.E della derivata: $x \neq 1, 2$. Per studiare il segno della derivata prima, basta considerare il denominatore $3(x-1)\ln^{\frac{1}{3}}(x-1) > 0$ nell'intervallo $x < 1$

$$\begin{array}{lll} 1° \, fattore > 0 & & \forall x > 1 \\ 2° \, fattore > 0 & \ln^{\frac{1}{3}}(x-1) > 0 & x > 2 \end{array}$$

avremo quindi $y' > 0$ per $x > 2$ e la funzione sarà crescente; $y' < 0$ per $1 < x < 2$ e la funzione sarà decrescente. Studiamo la derivata nel punto $x = 2$ nei due intervalli, in quanto la derivata non è definita per $x = 2$.

$$\lim_{x\to 2^-} y' = -\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} y' = +\infty$$

Il punto $(2; 0)$ è punto di cuspide e minimo assoluto.

[Studio dei punti di non derivabilità. Si ha un

- punto angoloso: è un punto del dominio di una funzione in cui esistono entrambe le derivate destra e sinistra, ma sono diverse ed almeno una di esse ha valore finito;
- una cuspide: se i limiti destro e sinistro della derivata prima tendono a $\pm\infty$ con segno opposto.

(1) flesso a tangente verticale: punto in cui la funzione è definita e il limite della derivata prima in quel punto diverge]

Flessi: calcoliamo la derivata seconda

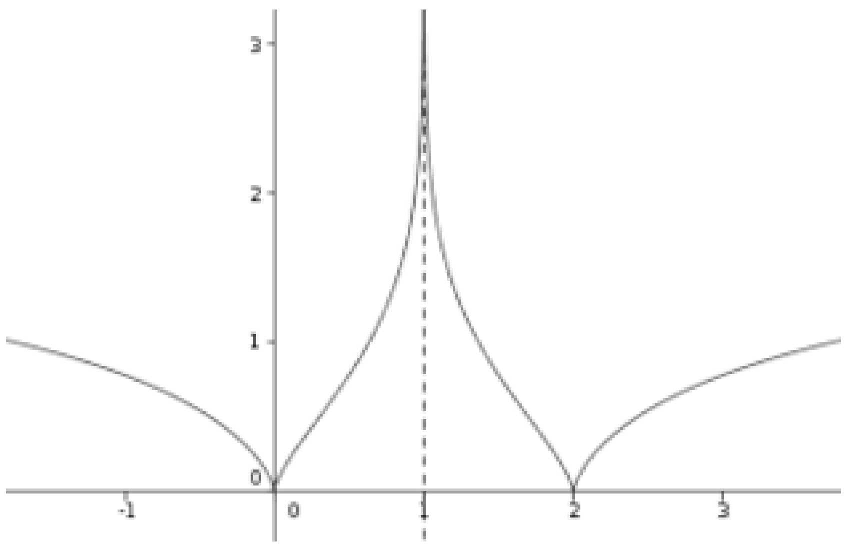
$$y" = \frac{2}{3}\cdot\frac{-\left[\ln^{\frac{1}{3}}(x-1) + \frac{1}{3}(x-1)\ln^{-\frac{2}{3}}(x-1)\cdot\frac{1}{x-1}\right]}{(x-1)^2\ln^{\frac{2}{3}}(x-1)} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{3\ln(x-1)+1}{(x-1)^2\ln^{\frac{4}{3}}(x-1)}$$

studiamo il segno della derivata seconda attraverso il segno del suo numeratore, essendo il denominatore sempre positivo

$$\begin{array}{ll} y" \geq 0 & 3\ln(x-1)+1 \leq 0 \\ & \ln(x-1) \leq -\dfrac{1}{3} \\ & x \leq 1 + \sqrt[3]{\dfrac{1}{e}} \sim 1,71 \end{array}$$

La funzione presenta una concavità verso il basso negli intervalli $1 + \sqrt[3]{\frac{1}{e}} < x < 2$ e $x > 2$; presenta concavità verso l'alto nell'intervallo $1 < x < 1 + \sqrt[3]{\frac{1}{e}}$. Avremo, quindi, un flesso discendente $F_2\left(1 + \sqrt[3]{\frac{1}{e}}; \sqrt[3]{\frac{1}{9}}\right)$.

Grafico della funzione:



Esercizio 29. Determinare l'insieme di definizione, classificare i punti di discontinuità, eliminandoli dove possibile, e studiare la funzione

$$y = \frac{|\ln|x||}{(2+\ln|x|)^2}$$

Soluzione. funzione trascendente fratta; l'insieme di definizione si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ \ln|x| \neq -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm e^{-2} \end{cases}$$

avremo quindi $C.E: \left(-\infty; -e^{-2}\right) \cup \left(-e^{-2}; 0\right) \cup \left(0; e^{-2}\right) \cup \left(e^{-2}; +\infty\right)$

Discontinuità: Calcoliamo i limiti nei punti di discontinuità per poterli classificare

$$\lim_{x\to 0^\pm} y = (H\hat{o}p) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x}{2(2+\ln|x|)} = 0^+ \quad \textit{eliminabile} \quad y = \begin{cases} \frac{|\ln|x||}{(2+\ln|x|)^2} & per \quad x \neq 0, \pm e^{-2} \\ 0 & per \quad x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\pm e^{-2}} y = +\infty \qquad 2^a \ \textit{specie}$$

avremo due asintoti verticali di equazione $x = \pm e^{-2}$.

Simmetrie: la funzione è simmetrica rispetto all'asse y, in quanto $f(-x) = f(x)$. Ciò consente di studiare la funzione solo per $x > 0$.

Intersezioni assi: essendo $x \neq 0$, non vi sono intersezioni con l'asse y;

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Segno: la funzione è sempre positiva nel $C.E.$

Asintoti orizzontali: calcoliamo gli altri limiti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{(2+\ln x)^2} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{(2+t)^2} = 0^+$$

avremo un asintoto orizzontale di equazione $y = 0$.

Crescenza e decrescenza: la funzione, contenendo pure il modulo del logaritmo, deve essere studiata in due diversi intervalli

$$y_1 = \frac{\ln x}{(2+\ln x)^2} \quad per \quad x \geq 1$$

$$y_2 = -\frac{\ln x}{(2+\ln x)^2} \quad per \quad 0 < x < e^{-2}\ e^{-2} < x \leq 1$$

calcoliamo la derivata prima di y_1

$$y_1' = \frac{\frac{1}{x}(2+\ln x)^2 - \frac{2}{x}(2+\ln x)\ln x}{(2+\ln x)^4} = \frac{2-\ln x}{x(2+\ln x)^3}$$

Il $C.E.$ della derivata coincide con quello di y_1. Studiamo il segno della derivata

$$\begin{array}{lll} N \geq 0 & 2 > \ln x & x < e^2 \\ D > 0 & x(2+\ln x)^3 & \forall x > 0 \end{array}$$

avremo

$$\begin{array}{ll} y' > 0 & x < e^2 \\ y' < 0 & x > e^2 \end{array}$$

e quindi $x = e^2$ sarà un massimo assoluto. Inoltre

$$\begin{aligned} y_1\left(e^2\right) &= \frac{1}{8} \\ y_1'(1) &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Calcoliamo la derivata prima di y_2

$$y_2' = \frac{\ln x - 2}{x(2+\ln x)^3}$$

il cui $C.E.: \left(0; e^{-2}\right) \cup \left(e^2; 1\right]$. Studiamo il suo segno, tenendo conto che y_2' non è mai nulla per $x \leq 1$.

$$\begin{array}{lll} N > 0 & \ln x > 2 & mai \\ D > 0 & x(2+\ln x)^3 & x > e^{-2} \end{array}$$

avremo quindi

$$\begin{array}{lll} y_2' > 0 & 0 < x < e^{-2} & f \; crescente \\ y_2' < 0 & e^{-2} < x > 1 & f \; decrescente \end{array}$$

inoltre

$$y_2'(1) = -\frac{1}{2}$$

per $x = 1$ le due derivate sono diverse e $x = 1$ è, quindi, un punto angoloso e minimo assoluto.

Inoltre

$$\lim_{x\to 0^+} y_2' = +\infty$$

e per la simmetria della funzione rispetto all'asse delle y, $x = 0$ è un punto di cuspide.

Concavità: calcoliamo le due derivate seconde

$$y"_1 = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x(2+\ln x)^3 - \left[(2+\ln x)^3 + 3x(2+\ln x)^2 \cdot \frac{1}{x}\right](2-\ln x)}{x^2(2+\ln x)^6} =$$

$$= \frac{(2+\ln x)^2\left[-2-\ln x-(2+\ln x)(2-\ln x)-6+3\ln x\right]}{x^2(2+\ln x)^6}$$

$$y"_1 = \frac{\ln^2 x + 2\ln x - 12}{x^2(2+\ln x)^6}$$

la derivata seconda si annulla quando è nullo il numeratore

$$\ln^2 x + 2\ln x - 12 = 0 \qquad \ln x = -1 \pm \sqrt{13}$$

per cui, $x = e^{\sqrt{13}-1}$ è un punto di flesso; inoltre

$$\begin{array}{lll} y"_1 > 0 & x > e^{\sqrt{13}-1} & concavità\, verso\, l'alto \\ y"_1 < 0 & 1 \le x < e^{\sqrt{13}-1} & concavità\, verso\, il\, basso \end{array}$$

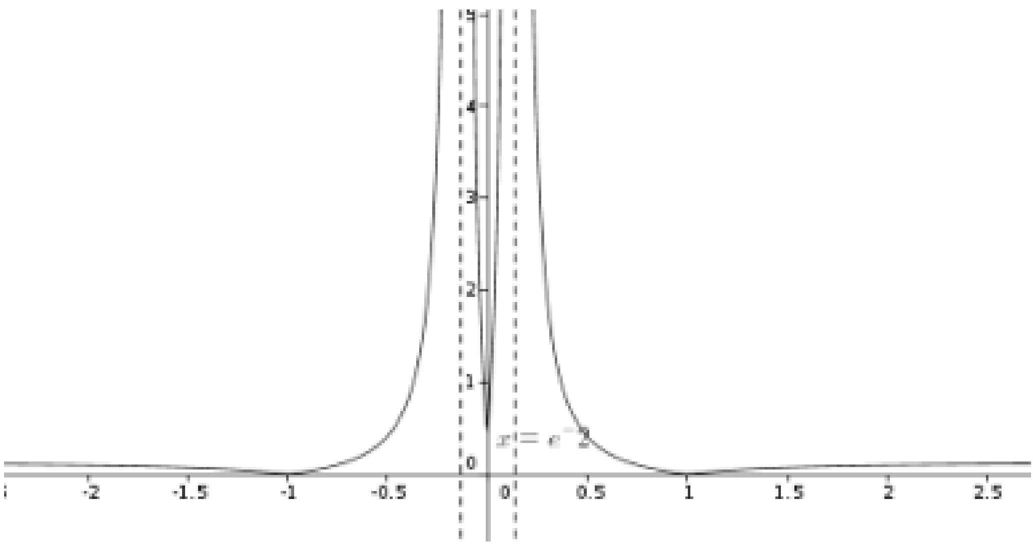
Studiamo ora la derivata nell'altro intervallo, cioè quella indicata come $y"_2$, con calcolo analogo, si ottiene

$$y"_2 = \frac{-\ln^2 x - 2\ln x + 12}{x^2(2+\ln x)^6}$$

per cui $y"_2 = 0$ per $x = e^{-\left(\sqrt{13}+1\right)}$ che sarà un ulteriore punto di flesso; inoltre

$$\begin{array}{lll} y"_2 > 0 & e^{-\left(\sqrt{13}+1\right)} < x < 1 & concavità\, verso\, l'alto \\ y"_2 < 0 & x < e^{-\left(\sqrt{13}+1\right)} & concavità\, verso\, il\, basso \end{array}$$

Grafico: rappresentiamo la funzione completa tenendo conto della simmetria inizialmente indicata



con questa scala non è possibile indicare il massimo relativo per $x = e^2$

Esercizio 30. Risolvere nel campo reale la seguente disequazione

$$\frac{|4-e^x|-1}{\sqrt{e^x-1}} \geq -\frac{1}{3}$$

Soluzione. possiamo riscrivere la disequazione nel seguente modo

$$\frac{|4-e^x|-1}{\sqrt{e^x-1}} + \frac{1}{3} \geq 0 \qquad \frac{3\left(|4-e^x|-1\right)+\sqrt{e^x-1}}{\sqrt{e^x-1}} \geq 0$$

la disequazione ha significato nel campo reale se il denominatore è maggiore di zero, cioè

$$C.E: \quad e^x > 1 \quad x > 0$$

Data tale condizione, il denominatore risulta sempre positivo e basta studiare il segno del numeratore nei due casi ottenibili studiando il valore assoluto

$$\begin{array}{lll} 1^\circ & 4-e^x > 0 & 0 < x \leq \ln 4 \\ 2^\circ & 4-e^x < 0 & x \geq \ln 4 \end{array}$$

1° caso: $0 < x < \ln 4$. La disequazione diviene

$$\frac{12-3e^x-3+\sqrt{e^x-1}}{\sqrt{e^x-1}} \geq 0$$

$$12-3e^x-3+\sqrt{e^x-1} > 0 \qquad \sqrt{e^x-1} > 3e^x-9$$

risolviamo la disequazione irrazionale mediante i due sistemi

$$\begin{cases} e^x-3 \leq 0 \\ e^x-1 > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} e^x-3 \geq 0 \\ e^x-1 \geq (3e^x-9)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq \ln 3 \\ x > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq \ln 3 \\ 9e^{2x}-55e^x+82 \leq 0 \end{cases}$$

$$0 < x \leq \ln 3 \qquad \begin{cases} x \geq \ln 3 \\ \ln \frac{55-\sqrt{73}}{18} \leq x \leq \ln \frac{55+\sqrt{73}}{18} \end{cases}$$

$$0 < x \leq \ln 3 \qquad \ln 3 \leq x \leq \ln \frac{55+\sqrt{73}}{18}$$

la soluzione in questo primo caso sarà pertanto $0 < x \leq \ln \frac{55+\sqrt{73}}{18}$.

2° caso: $x \geq \ln 4$, la disequazione diviene

$$\frac{-12+3e^x-3+\sqrt{e^x-1}}{\sqrt{e^x-1}} \geq 0$$

il numeratore sarà positivo quando

$$-12+3e^x-3+\sqrt{e^x-1} \geq 0 \qquad \sqrt{e^x-1} \geq 15-3e^x$$

risolviamo la disequazione irrazionale mediante i due sistemi

$$\begin{cases} 15-3e^x \leq 0 \\ e^x-1 > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} 5-e^x \geq 0 \\ e^x-1 \geq 9\left(25+e^{2x}-10e^x\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \ln 5 \\ x > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \leq \ln 5 \\ 9e^{2x}-91e^x+226 \leq 0 \end{cases}$$

$$x \geq \ln 5 \qquad \ln \frac{91-\sqrt{145}}{18} \leq x \leq \ln 5$$

la soluzione in questo primo caso sarà pertanto $x \geq \ln \frac{91-\sqrt{145}}{18}$.

La disequazione sarà pertanto verificato negli intervalli

$$0 < x \leq \ln \frac{55+\sqrt{73}}{18} \qquad x \geq \ln \frac{91-\sqrt{145}}{18}$$

Esercizio 31. Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{\ln(x+1)}{x+1}\left[\ln^2(x+1)\cdot \arctan\left(\ln^2(x+1)\right)+\frac{1}{1+\ln^4(x+1)}\right]dx$$

nelle condizioni $x > -1$ e $x \neq 0$.

Soluzione. Applichiamo la sostituzione di variabile $t = \ln^2(x+1)$, per cui $dt = \frac{2\ln(x+1)}{x+1}dx$. L'integrale diviene

$$\frac{1}{2}\int\left(t\arctan t + \frac{1}{1+t^2}\right)dt$$

la funzione integranda è una somma di termini e per i teoremi noti, si ha

$$\tfrac{1}{2}\int \arctan t dt + \tfrac{1}{2}\int \tfrac{1}{1+t^2}dt =$$

risolviamo il primo integrale per parti

$$\frac{1}{4}t^2\arctan t - \frac{1}{4}\int\frac{t^2}{1+t^2}dt + \frac{1}{2}\arctan t = \frac{t^2}{4}\arctan t + \frac{1}{2}\arctan t - \frac{1}{4}\int\frac{t^2+1-1}{1+t^2}dt =$$

$$= \frac{t^2}{4}\arctan t + \frac{1}{2}\arctan t - \frac{1}{4}\int dt + \frac{1}{4}\int\frac{1}{1+t^2}dt = \frac{t^2}{4}\arctan t + \frac{1}{2}\arctan t - \frac{1}{4}t + \frac{1}{4}\arctan t =$$

$$\frac{t^2}{4}\arctan t + \frac{3}{4}\arctan t - \frac{1}{4}t + C$$

La soluzione rispetto alla variabile x sarà

$$\frac{1}{4}\left(\ln^4(x+1)\cdot\arctan\left(\ln^2(x+1)\right) + 3\arctan\left(\ln^2(x+1)\right) - \left(\ln^2(x+1)\right)\right) + C$$

Esercizio 32. Tracciare il grafico della funzione

$$y = xe^{-\ln^2 x + |\ln x|}$$

Soluzione. Campo di Esistenza: la funzione esponenziale ha il campo di esistenza del suo esponente; in questo caso, dovendo esistere il logaritmo, avremo $x > 0$ oppure $(0;+\infty)$.

Intersezioni con assi: per il campo di esistenza non vi sono intersezioni con l'asse x, mentre per le intersezioni con l'asse y

$$\begin{cases} -\ln^2 x + |\ln x| = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \ln x(\ln x \pm 1) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Non esistono simmetrie.

Segno: nel campo di esistenza la funzione risulta sempre non negativa, cioè $y \geq 0 \ \forall x \in C.E.$

Asintoti: calcoliamo i limiti negli estremi di campo di esistenza

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-\ln^2 x + |\ln x|} =$$

sostituendo $t = \ln x$, da cui $x = e^t$, avremo

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-t^2+t+|t|} \approx \lim_{x\to+\infty} e^{-\infty} = 0^+$$

$$\lim_{x\to0^+} xe^{-\ln^2 x+|\ln x|} = \lim_{t\to-\infty} e^{-t^2+t+|t|} \approx \lim_{t\to-\infty} e^{-t^2} = 0^+$$

Avremo quindi un asintoto orizzontale di equazione $y = 0$.

Crescenza, decrescenza: la presenza del modulo richiede di considerare la funzione nei due intervalli

$$\|\ln x\| \quad = \quad \begin{matrix} \ln x & x \geq 1 \\ -\ln x & 0 < x \leq 1 \end{matrix}$$

1° caso: $x \geq 1$, la funzione diviene

$$y_1 = xe^{-\ln^2 x + \ln x}$$

e $y_1(1) = 1$; calcoliamo la derivata prima

$$y_1' = e^{-\ln^2 x+\ln x} + xe^{-\ln^2 x+\ln x}\left(\frac{-2\ln x}{x} + \frac{1}{x}\right) = 2e^{-\ln^2 x+\ln x}(1-\ln x)$$

il campo di esistenza della derivata coincide con quello della funzione y_1. Inoltre, $y_1'(1) = 2$

Studiamo il segno della derivata, ricordando che l'esponenziale è sempre positivo

$$\begin{matrix} y_1' \geq 0 & 1-\ln x \geq 0 & 1 \leq x \leq e & f \ \textit{crescente} \\ y_1' \leq 0 & 1-\ln x \leq 0 & x \geq e & f \ \textit{decrescente} \end{matrix}$$

avremo quindi un massimo relativo per $x = e$. Studiamo la derivata seconda

$$\begin{aligned} y"_1 &= 2e^{-\ln^2 x+\ln x}\left(\frac{-2\ln x}{x}+\frac{1}{x}\right)(1-\ln x)+2e^{-\ln^2 x+\ln x}\left(-\frac{1}{x}\right)= \\ &= \frac{2e^{-\ln^2 x+\ln x}}{x}\ln x\,(2\ln x-3) \end{aligned}$$

Nel campo di esistenza l'esponenziale, il logaritmo e il denominatore sono sempre positivi, per cui

$$\begin{array}{llll} y"_1 \geq 0 & 2\ln x - 3 \geq 0 & x \geq e^{\frac{3}{2}} & f \textit{ concava} \\ y"_1 \leq 0 & 2\ln x - 3 \leq 0 & 1 \leq x \leq e^{\frac{3}{2}} & f \textit{ convessa} \end{array}$$

avremo quindi un flesso di tangente obliqua per $x = e^{\frac{3}{2}}$.

2° caso: $0 < x \leq 1$, la funzione diventa

$$y_2 = xe^{-\ln^2 x-\ln x}$$

e $y_2(1) = 1$; calcoliamo la derivata prima

$$y_1' = e^{-\ln^2 x-\ln x} + xe^{-\ln^2 x-\ln x}\left(\frac{-2\ln x}{x}-\frac{1}{x}\right) = -2\ln x\cdot e^{-\ln^2 x+\ln x}$$

il campo di esistenza della derivata coincide con quello della funzione y_2. Inoltre, $y_1'(1) = 0$. Per $x = 1$ avremo, quindi, un punto angoloso. Calcoliamo il limite della derivata nell'estremo sinistro dell'intervallo

$$\lim_{x\to 0^+} -2\ln x\cdot e^{-\ln^2 x+\ln x} = 0$$

e per $x = 0$ avremo un punto a tangente orizzontale.

Studiamo il segno della derivata, ricordando che l'esponenziale è sempre positivo

$$y"_2 \geq 0 \quad -2\ln x \geq 0 \quad x \leq 1 \;\; f \textit{ sempre crescente}$$

Studiamo la derivata seconda

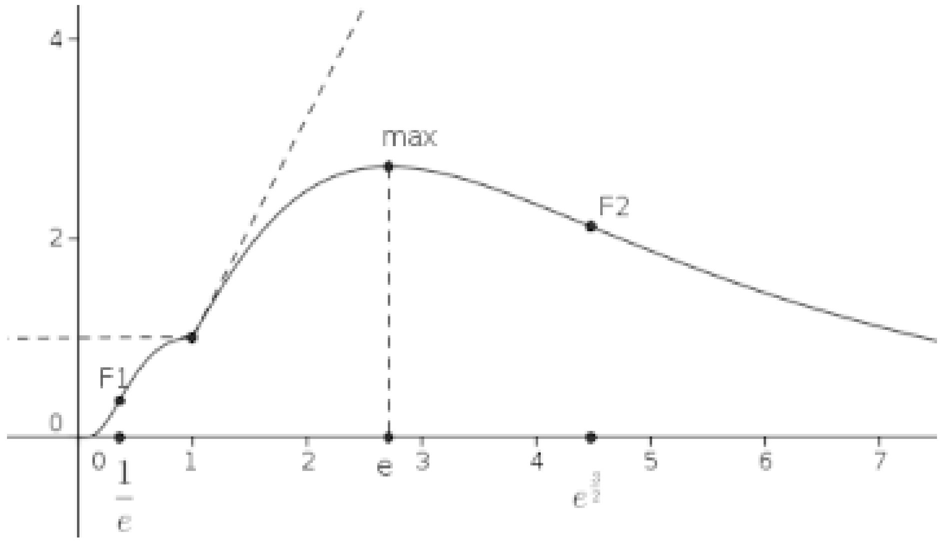
$$y"_2 = 2e^{-\ln^2 x+\ln x}\cdot\frac{2\ln^2 x+\ln x+1}{x}$$

Avremo

$$\begin{array}{lll} y_2" \geq 0 & 2\ln^2 x + \ln x + 1 & \begin{array}{c} x \geq e^{\frac{1}{2}} \textit{ non accettabile} \\ x \leq e^{-1} \textit{ accettabile} \end{array} \\ y"_1 \geq 0 & \begin{array}{c} 0 < x \leq e^{-1} \\ x \geq e^{-1} \end{array} & \begin{array}{c} f \textit{ concava} \\ f \textit{ convessa} \end{array} \end{array}$$

avremo quindi un flesso a tangente obliqua per $x = e^{-1}$.

Grafico: rappresentiamo graficamente la funzione data



Esercizio 33. Risolvere nel campo reale la seguente disequazione

$$\frac{3e^x}{2xe^{2x+1}} \geq \frac{e^{2x}}{4x+1}$$

Soluzione. si tratta di una disequazione non algebrica, di cui studiamo il campo di esistenza, ponendo i denominatori diversi da zero

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Poiché gli esponenziali sono sempre positivi, la disequazione si può riscrivere, dividendo i due esponenziali della prima frazione,

$$\frac{3}{2xe^{x+1}} \geq \frac{e^{2x}}{4x+1}$$

moltiplico ora entrambi i membri per e^{x+1} e ottengo la disequazione equivalente

$$\frac{3}{2x} \geq \frac{e^{3x+1}}{4x+1}$$

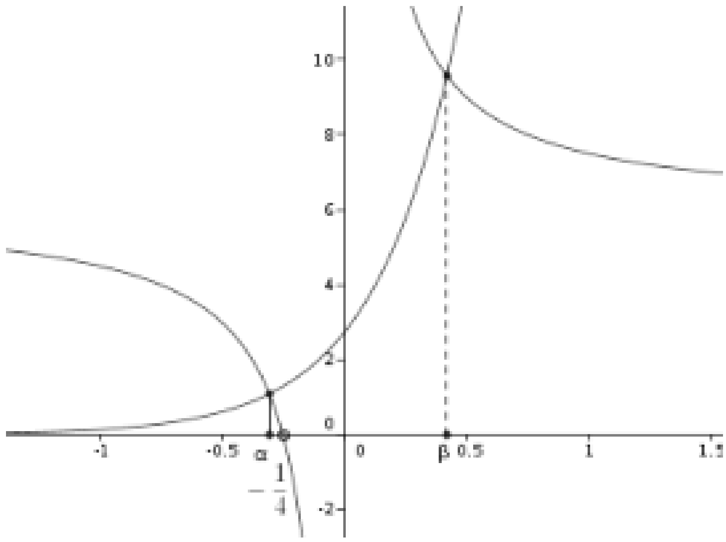
Osserviamo che se $x > -\frac{1}{4}$ il polinomio $4x+1>0$ e la disequazione è equivalente a

$$\frac{3\,(4x+1)}{2x} \geq e^{3x+1}$$

mentre se $x < -\frac{1}{4}$, la disequazione è equivalente a

$$\frac{3\,(4x+1)}{2x} \leq e^{3x+1}$$

Studiamo le funzioni $y_1 = \frac{3(4x+1)}{2x}$ e $y_2 = e^{3x+1}$ e risolviamo graficamente, osservando che y_1 è un'iperbole traslata con asintoti $y = 6$ e $x = 0$ passante per $x = -\frac{1}{4}$, e y_2 è una funzione esponenziale. I grafici sono rappresentati in figura



Avremo, pertanto, le soluzioni $\alpha \leq x < -\frac{1}{4}$ e $0 < x \leq \beta$ con, come si vede in figura, $\alpha < -\frac{1}{4}$ e $\beta > 0$.

Esercizio 34. Calcolare il valore del seguente integrale definito

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x \cos x \cdot \ln\left(\sin^2 x + 2\right)}{\left(\sin^2 x + 1\right)^3} dx$$

Soluzione. Osservando che $2\sin x\cos x dx = d\left(\sin^2 x\right)$, introduciamo la seguente sostituzione $t = \sin^2 x$ e $dt = 2\sin x\cos x dx$; l'integrale diviene

$$\int_0^1 \frac{\ln(t+2)}{(t+1)^3} dt$$

Calcoliamo l'integrale indefinito per parti, ponendo $f = \ln(t+2)$ sarà $f' = \frac{1}{t+2}$ e $g' = (t+1)^{-3}\,dt$, per cui $g = -\frac{1}{2(t+1)^2}$

$$I = \int \frac{\ln(t+2)}{(t+1)^3} dt$$

quindi

$$I=-\frac{\ln(t+2)}{2(t+1)^2}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{(t+1)^2(t+2)}dt=$$

calcoliamo l'integrale $\int\frac{1}{(t+1)^2(t+2)}dt$ riscrivendo la frazione come

$$\frac{A}{t+1}+\frac{B}{(t+1)^2}+\frac{C}{t+2}=\frac{1}{(t+1)^2(t+2)}$$

svolgendo abbiamo

$$\begin{aligned}A(t+1)(t+2)+B(t+2)+C(t+1)^2 &= 1\\ At^2+3At+2A+Bt+2B+Ct^2+2Ct+C &= 1\\ t^2(A+C)+t(3A+B+2C)+(2A+2B+C) &= 1\end{aligned}$$

confrontando i termini ai due membri osserviamo che

$$\begin{cases}A+C=0\\3A+B+2C=0\\2A+2B+C=1\end{cases}\qquad\begin{cases}C=-A\\3A+B-2A=0\\2A+2B-A=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}C=-A\\A=-B\\A+2B=1\end{cases}\qquad\begin{cases}A=-1\\B=1\\C=1\end{cases}$$

l'integrale diverrà

$$\frac{1}{2}\int\frac{1}{(t+1)^2(t+2)}dt=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{(t+1)^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t+2}$$

avremo quindi

$$I=-\frac{\ln(t+2)}{2(t+1)^2}-\frac{1}{2}\ln|t+1|-\frac{1}{2(t+1)}+\frac{1}{2}\ln|t+2|+C$$

Il nostro integrale definito avrà quindi come soluzione

$$\int_0^1\frac{\ln(t+2)}{(t+1)^3}dt=-\frac{\ln 3}{8}-\frac{\ln 2}{2}-\frac{1}{4}+\frac{\ln 3}{2}+\frac{\ln 2}{2}+\frac{1}{2}-\frac{\ln 2}{2}=\frac{1}{4}-\frac{\ln 2}{2}+\frac{3\ln 3}{8}$$

Esercizio 35. Studiare la seguente funzione e tracciarne il grafico

$$y=\sqrt{1-\frac{4x-8}{x^2-4x+8}}$$

Soluzione. Riscriviamo la funzione, sommando i termini del radicando

$$y=\sqrt{\frac{x^2-8x+16}{x^2-4x+8}}=\sqrt{\frac{(x-4)^2}{x^2-4x+8}}=\frac{|x-4|}{\sqrt{x^2-4x+8}}$$

Campo di esistenza: il denominatore e radicando è sempre positivo ($\Delta<0$) per cui la funzione esiste $\forall x\in\mathbb{R}$.
Simmetrie: la funzione non è né pari né dispari.
Si può semplificare lo studio di questa funzione analizzando la funzione

$$y=\frac{x-4}{\sqrt{x^2-4x+8}}$$

ed eseguendo le opportune simmetrie delle sue parti negative.
Intersezioni:

$$\begin{cases}x=0\\y=-\frac{2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}\end{cases}\qquad\begin{cases}x=4\\y=0\end{cases}$$

Segno: risolviamo la disequazione

$$\frac{x-4}{\sqrt{x^2-4x+8}}>0$$

Essendo il denominatore sempre positivo, avremo

$$\begin{aligned}y>0 &\quad per \quad x>4\\ y<0 &\quad per \quad x<4\end{aligned}$$

Asintoti: calcoliamo i limiti negli estremi del campo di esistenza

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x\left(1-\frac{4}{x}\right)}{|x|\sqrt{\left(1-\frac{4}{x}+\frac{8}{x^2}\right)}}=\pm1$$

avremo due asintoti orizzontali di equazione $y=1$ e $y=-1$ e non vi sono asintoti obliqui.

Crescenza, decrescenza: calcoliamo la derivata prima della funzione

$$y'=\frac{\sqrt{x^2-4x+8}-(x-4)\,\frac{2(x-2)}{2\sqrt{x^2-4x+8}}}{x^2-4x+8}=\frac{x^2-4x+8-4x^2+6x-8}{\left(x^2-4x+8\right)\sqrt{x^2-4x+8}}=\frac{2x}{\left(x^2-4x+8\right)\sqrt{x^2-4x+8}}$$

il campo di esistenza della derivata coincide con quello della funzione, ed essendo ancora il denominatore sempre positivo, avremo

$$\begin{array}{lll} y'>0 & x>0 & f.\ crescente \\ y'<0 & x<0 & f\ descrescente \end{array}$$

Avremo pertanto un minimo nel punto $m\left(0;-\sqrt{2}\right)$.

Flessi: calcoliamo la derivata seconda

$$\begin{aligned} y" &= \frac{2\left(x^2-4x+8\right)\sqrt{x^2-4x+8}-2x\cdot\frac{6\left(x^2-4x+8\right)^2(x-2)}{2\left(x^2-4x+8\right)\sqrt{x^2-4x+8}}}{\left(x^2-4x+8\right)^3}= \\ &= \frac{2\left(x^2-4x+8\right)^2\left(2x^2-4x+8-3x^2+6x\right)}{\left(x^2-4x+8\right)^2\sqrt{\left(x^2-4x+8\right)}}=\frac{-4\left(x^2-x-4\right)}{\sqrt{\left(x^2-4x+8\right)^5}} \end{aligned}$$

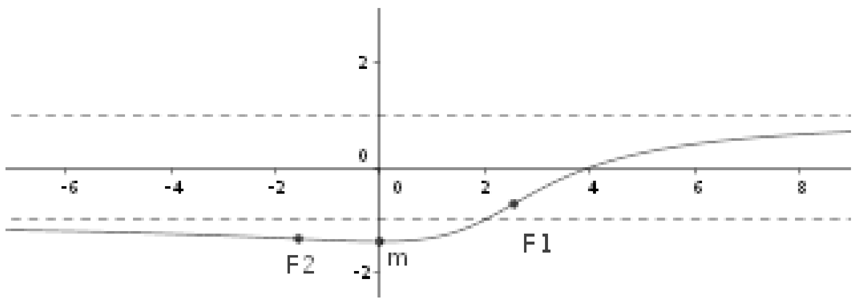
la derivata seconda ha lo stesso campo di esistenza della funzione e si annulla se

$$x^2-x-4=0 \qquad x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$$

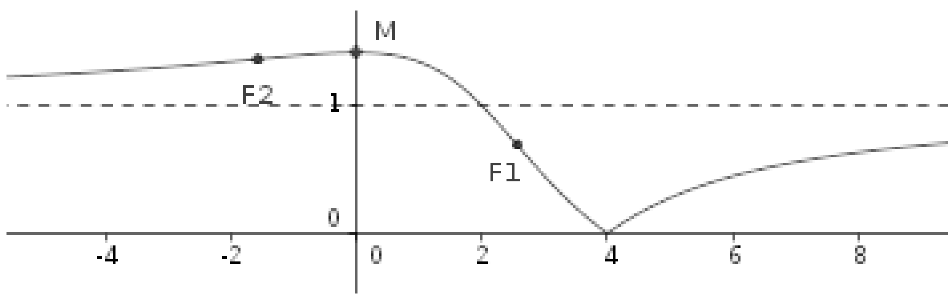
avremo due flessi in corrispondenza di questi valori di x; inoltre

$$\begin{array}{lll} y">0 & x<\frac{1-\sqrt{17}}{2}\ \vee\ x>\frac{1+\sqrt{17}}{2} & concavit\grave{a}\,verso\,alto \\ y"<0 & \frac{1-\sqrt{17}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{17}}{2} & concavit\grave{a}\,verso\,basso \end{array}$$

la funzione avrà quindi l'andamento in figura



Applichiamo ora il ribaltamento della parte negativa



Si può osservare che ora l'intersezione di ascissa $x=0$ è punto di massimo assoluto e che il punto $(4;0)$ è di minimo assoluto ed è un punto angoloso in quanto

$$\begin{aligned} y'_-(4) &= -\sqrt{2} \\ y'_+(4) &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

Esercizio 36. Calcolare, mediante la definizione, la derivata di $f(x) = e^{\sqrt{4-5x}}$ con $x < \frac{4}{5}$.

Soluzione. Soluzione la definizione di derivata è la seguente

$$y'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

e applicata alla funzione assegnata, diviene

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{\sqrt{4-5(x+h)}} - e^{\sqrt{4-5x}}}{h}$$

ricordando il limite notevole $\lim_{f(x)\to 0} \frac{e^{f(x)}-1}{f(x)} = 1$, riscriviamo il rapporto incrementale

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{\sqrt{4-5x}}\left(e^{\sqrt{4-5(x+h)}-\sqrt{4-5x}}-1\right)\left(\sqrt{4-5(x+h)}-\sqrt{4-5x}\right)}{h\left(\sqrt{4-5(x+h)}-\sqrt{4-5x}\right)} = \frac{e^{\sqrt{4-5x}}\left(\sqrt{4-5(x+h)}-\sqrt{4-5x}\right)}{h}$$

razionalizziamo il numeratore

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{\sqrt{4-5x}}\left(\sqrt{4-5(x+h)}-\sqrt{4-5x}\right)\left(\sqrt{4-5(x+h)}+\sqrt{4-5x}\right)}{h\left(\sqrt{4-5(x+h)}+\sqrt{4-5x}\right)} =$$

$$= \frac{e^{\sqrt{4-5x}}(4-5x-5h-4+5x)}{h\left(\sqrt{4-5(x+h)}+\sqrt{4-5x}\right)} = \frac{-5h\cdot e^{\sqrt{4-5x}}}{h\left(\sqrt{4-5(x+h)}+\sqrt{4-5x}\right)} = -\frac{5}{2}$$

Esercizio 37. Calcolare il valore del seguente integrale definito

$$\int_2^{2+\ln 2} \frac{\ln\left(4+e^{2x-4}\right)}{e^{x-2}}dx$$

Soluzione. operiamo la sostituzione $t = e^{x-2}$ e $x = \ln t + 2$, $dx = \frac{dt}{t}$. L'integrale diviene

$$\int_1^2 \frac{\ln\left(4+t^2\right)}{t^2}dt =$$

integriamo per parti con $f' = \frac{dt}{t^2}$ e $g = \ln\left(4+t^2\right)$

$$= \left[-\frac{1}{t}\ln\left(4+t^2\right)\right]_1^2 + 2\int_1^2 \frac{dt}{4+t^2} = \left[-\frac{1}{t}\ln\left(4+t^2\right) + \frac{2}{2}\arctan\frac{x}{2}\right]_1^2 =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln 8 + \frac{\pi}{4} + \ln 5 - \arctan\frac{1}{2} = \ln\frac{5}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4} - \arctan\frac{1}{2}$$

Esercizio 38. Tracciare il grafico della seguente funzione

$$y = \left(1-\frac{x^2}{4}\right)\left(2-\frac{2x}{|x|}\right) + \ln\left(\frac{e^x+4e^{-|x|}}{5}\right)$$

e precisare il tipo di discontinuità della funzione nel punto di ascissa zero

Soluzione. Campo di Esistenza: l'argomento del logaritmo è sempre positivo, per cui basterà $x \neq 0$, cioè $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

Per la presenza del $|x|$ la funzione si divide in due parti

$$y = \begin{cases} \left(1-\frac{x^2}{4}\right)\left(2-\frac{2x}{-x}\right) + \ln\left(\frac{e^x+4e^x}{5}\right) = -x^2+x+4 & x < 0 \\ \left(1-\frac{x^2}{4}\right)\left(2-\frac{2x}{x}\right) + \ln\left(\frac{e^x+4e^{-x}}{5}\right) = \ln\left(\frac{e^x+4e^{-x}}{5}\right) & x > 0 \end{cases}$$

Studiamo separatamente i due rami

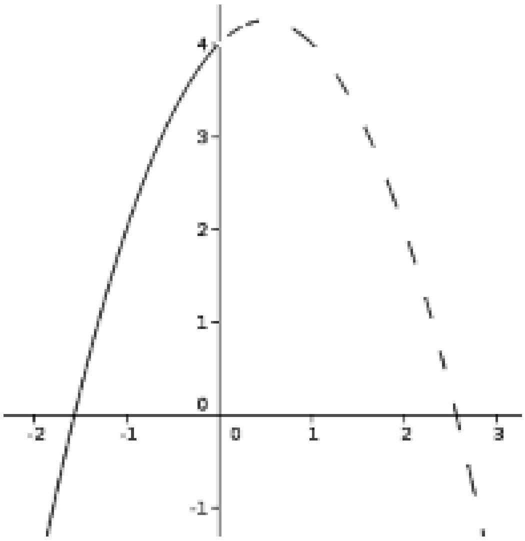
1°) $y = -x^2+x+4$ con $x < 0$. La funzione si rappresenta osservando che essa rappresenta una parabola con concavità rivolta verso il basso, $V\left(\frac{1}{2}; \frac{17}{4}\right)$ e può intersecare solo l'asse x nel punto ad ascissa negativa $x = \frac{1-\sqrt{17}}{2}$.

Inoltre

$$\lim_{x\to 0^-} -x^2+x+4 = 4$$

e la sua derivata prima è

$$y' = -2x + 1 \qquad y'\left(0^-\right) = 1$$



2°) $y = \ln\left(\frac{e^x+4e^{-x}}{5}\right)$ con $x > 0$.
Intersezione asse y:

$$\begin{cases} \frac{e^x+4e^{-x}}{5} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} e^{2x} - 5e^x + 4 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} e^{x_1} = 1 (non\ accett) \quad e^{x_2} = 4 \\ B\left(2\ln 2; 0\right) \end{array}$$

La funzione non presenta simmetria.
Segno:

$$\ln\left(\frac{e^x + 4e^{-x}}{5}\right) > 0 \qquad e^{2x} - 5e^x + 4 > 0$$

per cui

$$\begin{array}{lll} y > 0 & per & x > 2\ln 2 \\ y < 0 & per & 0 < x < 2\ln 2 \end{array}$$

Asintoti: Calcoliamo i limiti

$$\lim_{x\to 0^+} \ln\left(\frac{e^x + 4e^{-x}}{5}\right) = \ln 1 = 0 \qquad \lim_{x\to +\infty} \ln\left(\frac{e^x + 4e^{-x}}{5}\right) = +\infty$$

Verifichiamo l'esistenza di un asintoto obliquo, essendo verificata la condizione necessaria

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x + 4e^{-x}}{5}\right) = \frac{1}{x}\left[\ln\left(e^x + 4e^{-x}\right) - \ln 5\right] = \frac{1}{x} \cdot \left\{\ln\left[e^x\left(1 + \frac{4}{e^{2x}}\right)\right] - \ln 5\right\}$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \left[x + \ln\left(1 + \frac{4}{e^{2x}}\right) - \ln 5\right] = 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{4}{e^{2x}}\right)}{x} - \frac{\ln 5}{x} = 1$$

Pertanto

$$q = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{e^x + 4e^{-x}}{5}\right) - x = x + \ln\left(1 + \frac{4}{e^{2x}}\right) - \ln 5 - x = -\ln 5$$

L'asintoto obliquo avrà equazione

$$y = x - \ln 5$$

Crescenza, decrescenza: calcoliamo la derivata prima, che è sempre definita

$$y' = \frac{5}{e^x + 4e^{-x}} \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(e^x - 4e^{-x}\right) = \frac{e^x - 4e^{-x}}{e^x + 4e^{-x}}$$

La derivata prima si annulla se

$$e^x - 4e^{-x} = 0 \quad e^{2x} - 4 = 0 \quad x = \ln 2$$

studiamo il segno della derivata

$$y' > 0 \quad \frac{e^x - 4e^{-x}}{e^x + 4e^{-x}} > 0 \quad \begin{matrix} N > 0 & x > \ln 2 \\ D > 0 & \forall x \in C.E. \end{matrix}$$

$$y' > 0 \qquad x > \ln 2 \qquad f\ crescente$$
$$y' < 0 \quad 0 < x < \ln 2 \quad f\ decrescente$$

Avremo un punto di minimo nel punto $m\left(\ln 2; \ln \frac{4}{5} \simeq -0.223\right)$

Flessi: studiamo la derivata seconda

$$y" = \frac{\left(e^x + 4e^{-x}\right)^2 - \left(e^x - 4e^{-x}\right)^2}{\left(e^x + 4e^{-x}\right)^2} = \frac{16}{\left(e^x + 4e^{-x}\right)^2}$$

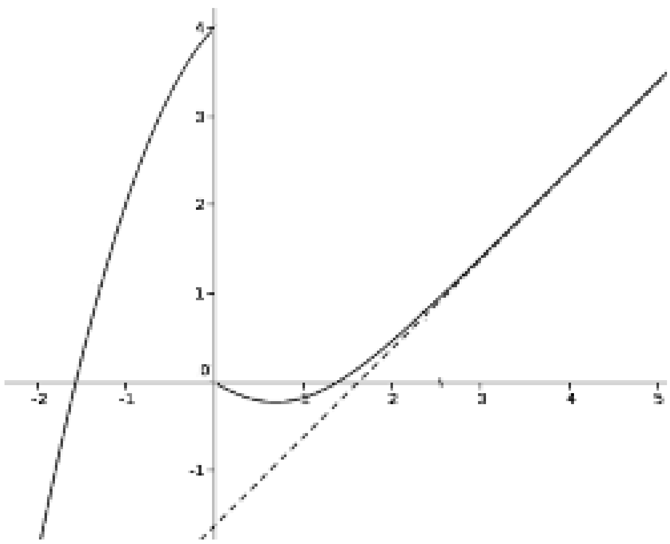
la derivata seconda è sempre positiva e la funzione avrà sempre, nell'intervallo $x > 0$, concavità rivolta verso l'alto.

Analizziamo la discontinuità nel punto di ascissa $x = 0$.

$$y'\left(0^+\right) = -\frac{3}{5}$$

Avremo quindi una discontinuità di prima specie non eliminabile, esistendo le derivate dx e sx ma avendo valore diverso.

Grafico:



Esercizio 39. Risolvere nel campo reale la seguente disequazione;

$$\frac{\ln(3-x) - e^{-x^2}}{\sqrt{4-x} - |x-2|} < 0$$

Soluzione. studiamo dapprima il campo di esistenza

$$\begin{cases} 3 - x > 0 \\ 4 - x \geq 0 \\ \sqrt{4-x} - |x-2| \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 3 \\ x \leq 4 \\ \sqrt{4-x} \neq |x-2| \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 3 \\ x \leq 4 \\ 4 - x \neq x^2 - 4x + 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 3 \\ x \leq 4 \\ x^2 - 3x \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 3 \\ x \leq 4 \\ x \neq 0\ x \neq 3 \end{cases} \qquad C.E: \ x < 0\ 0 < x < 3$$

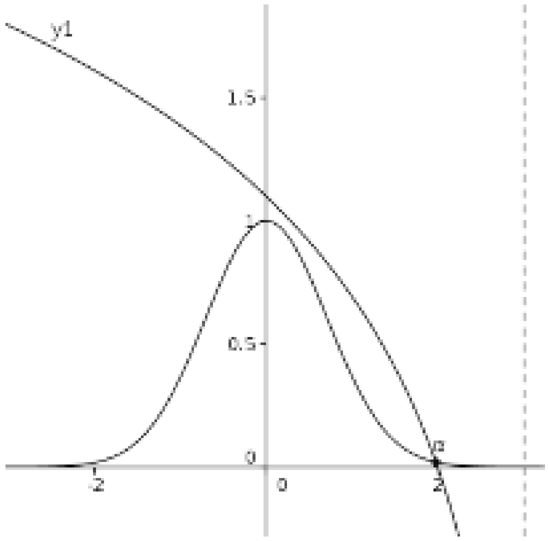
Studiamo ora la disequazione iniziando dal suo numeratore

$$N > 0 \qquad \ln(3-x) > e^{-x^2}$$

risolviamo graficamente ponendo $y_1 = \ln(3-x)$ e $y_2 = e^{-x^2}$.

y_1 è la funzione logaritmo naturale traslata verso destra di 3 e sulla quale si opera una riflessione rispetto all'asse

y; la y_2 è una funzione sempre positiva, pari $(y(-x) = y(x)$ con asintoto orizzontale $y = 0$ e massimo per $x = 1$. La loro forma grafica è in figura, dalla quale è possibile risolvere la disequazione



Avremo quindi $N > 0$ per $x < \alpha$ $(x \neq 0)$ con $1.5 < \alpha < 2$.
Studiamo ora il denominatore

$$D > 0 \qquad \sqrt{4-x} > |x-2|$$

entrambi i membri sono positivi nel campo di esistenza, per cui, elevando al quadrato,

$$\begin{array}{ll} D > 0 & x^2 - 3x > 0 \\ & x < 0 \;\; x > 3 \end{array}$$

La disequazione avrà come soluzione

$$\begin{array}{rl} N > 0 & x < \alpha, \;\; x \neq 0 \\ D > 0 & x < 0 \;\; x > 3 \\ frazione & x < 0 \;\vee\; \alpha < x < 3 \end{array}$$

Esercizio 40. Calcolare il valore del seguente integrale definito

$$\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x\sqrt{\ln x + 1}} dx$$

Soluzione. Introduciamo la sostituzione $t = \ln x$, per cui $x = e^t$ e $dx = e^t dt$; inoltre, se $x = 1$, allora $t = \ln 1 = 0$ e se $x = e^2$, allora $t = \ln e^2 = 2$. Avremo quindi

$$\int_0^2 \frac{t \cdot e^t}{e^t \sqrt{t+1}} dt = \int_0^2 \frac{t}{\sqrt{t+1}} dt = \int_0^2 \frac{2t}{2\sqrt{t+1}} dt$$

ricordando che il differenziale di $d\left(\sqrt{t+1}\right) = \dfrac{dt}{2\sqrt{t+1}}$, integriamo per parti

$$2t\sqrt{t+1}\,\Big|_0^2 - 2\int_0^2 \sqrt{t+1}dt = \left[2t\sqrt{t+1} - \frac{4}{3}(t+1)\sqrt{t+1}\right]_0^2 = \left[\frac{2}{3}\sqrt{t+1}\,(t-2)\right]_0^2 = \frac{2}{3}\sqrt{3}\cdot 0 + \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

Esercizio 41. Studiare le caratteristiche della seguente funzione e tracciarne il grafico $y = 3\sqrt[3]{x-1} + \ln\sqrt[3]{x}$

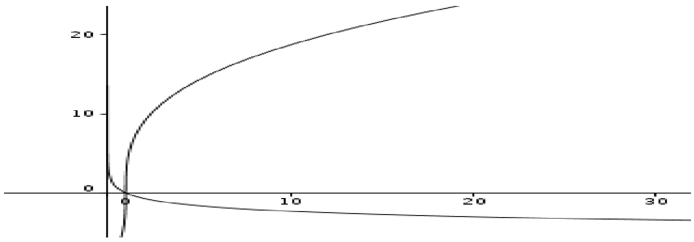
Soluzione. Campo di Esistenza: la radice cubica è sempre definita, mentre l'argomento del logaritmo deve essere positivo, per cui

$$C.E.: \; x > 0$$

Segno: determiniamo il segno della funzione e gli eventuali punti di intersezione con l'asse x; non vi saranno intersezione con l'asse y per le C.E

$$3\sqrt[3]{x-1}+\ln\sqrt[3]{x}>0 \qquad 3\sqrt[3]{x-1}+\frac{1}{3}\ln x>0$$
$$9\sqrt[3]{x-1}>-\ln x>0$$

risolviamo graficamente indicando con $y_1 = 9\sqrt[3]{x-1}$ e $y_2 = -\ln x$. La funzione y_1 è traslata verso destra di vettore $(1;0)$ ed è simmetrica rispetto a questo punto ed è inoltre dilatata verticalmente; la funzione y_2 è nota. La figura mostra le due funzioni



y_1 e y_2 si intersecano nel punto $(1;0)$ e dalla figura si ricava

$$\begin{array}{ll} y>0 & x>1 \\ y=0 & x=1 \\ y<0 & 0<x<1 \end{array}$$

Asintoti: calcoliamo i limiti negli estremi del C.E.

$$\lim_{x\to0^+} 3\sqrt[3]{x-1}+\ln\sqrt[3]{x}=-\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} 3\sqrt[3]{x-1}+\ln\sqrt[3]{x}=+\infty$$

Avremo un asintoto verticale di equazione $x=0$. Verifichiamo la presenza di asintoto obliquo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3\sqrt[3]{x-1}+\ln\sqrt[3]{x}}{x}=0$$

infatti x è un infinito di ordine superiore rispetto a $x^{\frac{1}{3}}$ e a $\ln x$. Non vi sono, pertanto asintoti obliqui.

Crescenza, decrescenza: calcoliamo la derivata prima della funzione $y=3\,(x-1)^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}\ln x$

$$y'=3\cdot\frac{1}{3}\,(x-1)^{-\frac{2}{3}}+\frac{1}{3x}=\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}+\frac{1}{3x}$$

il campo di esistenza della derivata è $x\neq 0,1$
studiamo il segno della derivata

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}+\frac{1}{3x}>0 \qquad \frac{3x+\sqrt[3]{(x-1)^2}}{3x\sqrt[3]{(x-1)^2}}>0$$
$$\begin{array}{ll} N>0 & \forall x\in C.E. \\ D>0 & \forall x\in C.E.-\{1\} \end{array}$$

la derivata prima è sempre positiva nelle condizioni indicate e la funzione è sempre crescente. Studiamo il limite della derivata per x tendente a 1

$$\lim_{x\to1^\pm}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}+\frac{1}{3x}=+\infty$$

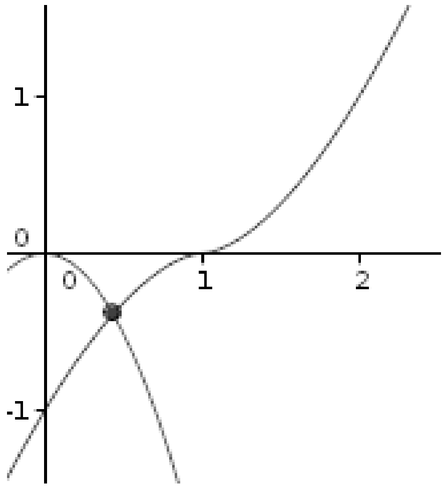
avremo quindi un punto a tangente verticale in $(1;0)$
Flessi: calcoliamo la derivata seconda

$$y"=-\frac{2}{3}\,(x-1)^{-\frac{5}{3}}-\frac{1}{3x^2}$$

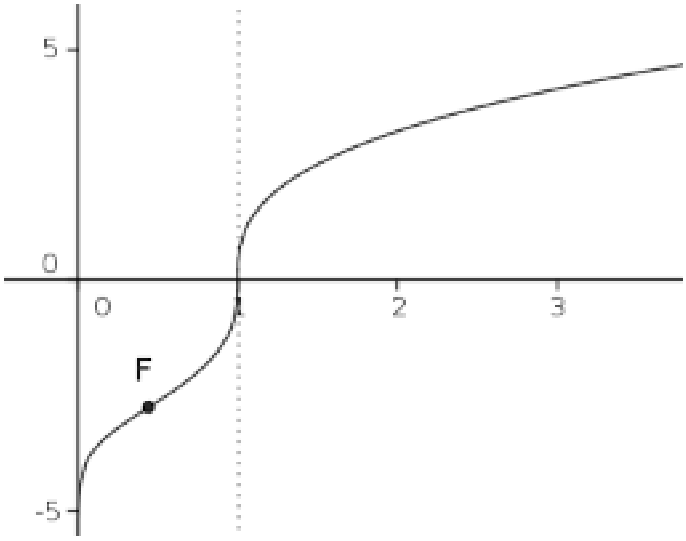
la derivata seconda ha lo stesso C.E della derivata prima e si annulla

$$-\frac{2}{3}\,(x-1)^{-\frac{5}{3}}-\frac{1}{3x^2}=0 \qquad 2x^2+\sqrt[3]{(x-1)^5}=0$$

la soluzione algebrica presenta un'equazione di sesto grado. Cerchiamo la soluzione graficamente, disegnando la parabola $y_1=-2x^2$ e la $y_2=\sqrt[3]{(x-1)^5}$



Avremo quindi un flesso, nel nostro C.E., per $0 < x < 1$.
Grafico:



Esercizio 42. Determinare per quali valori del parametro reale a la seguente funzione è continua in $[0; 2\pi]$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x + \sin^2 \frac{x}{2}}{(\pi - x)^2} & 0 \leq x < \pi \\ ax^2 & \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

Soluzione. calcoliamo il limite per $x \to \pi$

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\cos x + \sin^2 \frac{x}{2}}{(\pi - x)^2} = \frac{\cos x + \dfrac{1-\cos x}{2}}{(\pi-x)^2} = \frac{1+\cos x}{2(\pi - x)^2} =$$
$$\lim_{x\to\pi} \frac{1-\cos(\pi - x)}{2(\pi - x)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\cos(\pi-x)}{(\pi-x)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Pertanto dovrà essere $a = \pm\dfrac{1}{2}$.

Esercizio 43. Risolvere la seguente equazione differenziale $y' - \left(y^2 - 4y - 21\right)\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}\right) = 0$

Soluzione. risolviamo mediante la separazione delle variabili

$$\frac{dy}{y^2 - 4y - 21} = \sqrt{1+\sqrt{x}}dx$$

e passando all'integrale

$$\int \frac{dy}{y^2-4y-21} = \int \sqrt{1+\sqrt{x}}dx$$

Risolviamo l'integrale al primo membro

$$\int \frac{dy}{y^2-4y-21} = \int \frac{1}{(y-7)(y+3)}dy$$

riscriviamo la frazione come somma di frazioni

$$\frac{1}{(y-7)(y+3)} = \frac{A}{y-7} + \frac{B}{y+3} = \frac{Ay+3A+By-7B}{(y-7)(y+3)} = \frac{y(A+B)+3A-7B}{(y-7)(y+3)}$$

ricaviamo A e B dal sistema

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 3A-7B=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=\frac{1}{10} \\ B=-\frac{1}{10} \end{cases}$$

l'integrale diviene

$$\int \frac{dy}{y^2-4y-21} = \frac{1}{10}\int \frac{dy}{y-7} - \frac{1}{10}\int \frac{dy}{y+3} = \frac{1}{10}\left(\ln\left|\frac{y-7}{y+3}\right|\right)$$

Risolviamo ora l'integrale al secondo membro

$$\int \sqrt{1+\sqrt{x}}dx$$

introduciamo la sostituzione $1+\sqrt{x}=t^2$ da cui $dx = 4t\left(t^2-1\right)$, l'integrale diviene

$$\int \left(4t^4-4t^2\right)dt = \frac{4}{5}t^5 - \frac{4}{3}t^3 = \frac{4}{5}\left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}\left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{15}\left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{3}{2}}\left(3\sqrt{x}-2\right)+C$$

L'equazione differenziale avrà come soluzioni

$$\frac{1}{10}\left(\ln\left|\frac{y-7}{y+3}\right|\right) = \frac{4}{15}\left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{3}{2}}\left(3\sqrt{x}-2\right)+C \qquad \frac{y+-7}{y+3} = e^{\frac{8}{3}\left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{3}{2}}\left(3\sqrt{x}-2\right)+C_1}$$

$$1-\frac{10}{y+3} = e^{\frac{8}{3}\left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{3}{2}}\left(3\sqrt{x}-2\right)+C_1} \qquad 1-e^{\frac{8}{3}\left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{3}{2}}\left(3\sqrt{x}-2\right)+C_1} = \frac{10}{y+3}$$

$$y = \frac{10}{\left(1-e^{\frac{8}{3}\left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{3}{2}}\left(3\sqrt{x}-2\right)+C_1}\right)} - 3$$

Esercizio 44. Studiare le caratteristiche della seguente funzione e tracciarne il grafico $y=\sqrt[3]{(x-1)^2}\cdot e^{x+1}$

Soluzione. Campo di esistenza: la funzione è definita su tutto l'insieme dei numeri reali $\forall \in \mathbb{R}$.

Intersezioni: determiniamo l'intersezione con gli assi cartesiani

$$asse\,x \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \qquad asse\,y \begin{cases} x=0 \\ y=e \end{cases}$$

Segno: risolviamo la disequazione $\sqrt[3]{(x-1)^2}\cdot e^{x+1}>0$

$$\begin{array}{lll} fat_1>0 & (x-1)^2>0 & x\neq 1 \\ fat_2>0 & e^{x+1}>0 & \forall x\in\mathbb{R} \end{array}$$

la funzione è quindi sempre positiva; $y>0\ \forall x\neq 1$.
Asintoti: calcoliamo i limiti agli estremi del campo di esistenza

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{(x-1)^2}\cdot e^{x+1} = \frac{(x-1)^{\frac{2}{3}}}{e^{-(x+1)}} \overset{Hop}{=} \frac{2e^{x+1}}{-3\sqrt[3]{x-1}} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{(x-1)^2}\cdot e^{x+1} = +\infty$$

avremo un asintoto orizzontale di equazione $y=0$; non vi sono asintoti verticali né obliqui.
Crescenza, decrescenza: calcoliamo la derivata prima

$$y' = \frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}}e^{x+1} + (x-1)^{\frac{2}{3}}e^{x+1} \quad = \quad e^{x+1}\left(\frac{3x-1}{3\sqrt[3]{x-1}}\right)$$

Il C.E della derivata è $x \neq 1$. Calcoliamo quindi i limiti destro e sinistro della derivata

$$\lim_{x\to 1^-} e^{x+1}\left(\frac{3x-1}{3\sqrt[3]{x-1}}\right) = \frac{2e^2}{0^-} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 1^+} e^{x+1}\left(\frac{3x-1}{3\sqrt[3]{x-1}}\right) = \frac{2e^2}{0^+} = +\infty$$

il punto di ascissa $x = 1$ sarà una cuspide essendo i limiti non finiti e di segno opposto. Studiamo il segno della derivata $y' > 0$

$$\begin{array}{rl} e^{x+1} > 0 & \forall x \\ 3x-1 > 0 & x > \dfrac{1}{3} \\ x-1 > 0 & x > 1 \end{array}$$

avremo

$$\begin{array}{lll} y' > 0 & x > \frac{1}{3} \ \vee \ x > 1 & f \ crescente \\ y' = 0 & x = \frac{1}{3} & max \\ y' < 0 & \frac{1}{3} < x < 1 & f \ decrescente \end{array}$$

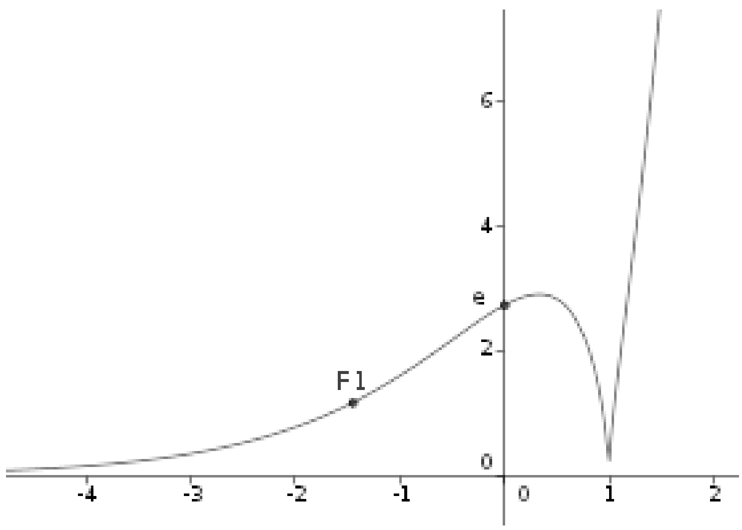
Flessi: calcoliamo la derivata seconda

$$\begin{aligned} y" &= \frac{3\left[e^{x+1}(3x-1) + 3e^{x+1}\right]\sqrt[3]{x-1} - e^{x+1}\frac{(3x-1)}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}}{9\sqrt[3]{(x-1)^2}} \\ &= \frac{3e^{x+1}(3x+2)(x-1) - e^{x+1}(3x-1)}{9\sqrt[3]{(x-1)^4}} = \frac{e^{x+1}\left(9x^2-6x-5\right)}{9\sqrt[3]{(x-1)^4}} \end{aligned}$$

la derivata seconda si annulla per

$$9x^2 - 6x - 5 = 0 \qquad x = 1 \pm \sqrt{6}$$

in questi due punti avremo due flessi.
Grafico:



Esercizio 45. Determinare gli integrali della seguente equazione differenziali

$$y - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}y' = 0$$

Soluzione. equazione differenziale lineare del primo ordine che risolviamo separando le variabili

$$\frac{dy}{dx}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} = y \qquad \frac{dy}{y} = \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$$

e passando agli integrali

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$$

l'integrale al primo membro è immediato $\int \frac{dy}{y} = \ln|y|$. Calcoliamo l'integrale al secondo membro operando la sostituzione $x = t^2$ da cui $dx = 2tdt$; l'integrale diviene

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = & \int \frac{\sqrt{1+t}}{t} \cdot 2tdt = & 2 \int \sqrt{1+t} dt \\ = & 2 \int (1+t)^{\frac{1}{2}} = & 2 \frac{(1+t)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} \left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{3}{2}} + C \end{aligned}$$

Le soluzioni saranno

$$\ln|y| = \frac{4}{3} \left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{3}{2}} + C \qquad y = C_1 e^{\frac{4}{3}\left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{3}{2}}}$$